1. Hinweise

– Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
– Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorhergegangenen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
– Arbeitszeit: 90 Minuten
– Jede der 5 Aufgaben ist gleich viele Punkte wert.
– Wähle am Ende, welche 4 der 5 Aufgaben zur Beurteilung herangezogen werden sollen:

☐ Aufgabe 1 ☐ Aufgabe 2 ☐ Aufgabe 3 ☐ Aufgabe 4 ☐ Aufgabe 5

2. Aufgaben

Aufgabe 1. Für welche Werte von k hat die quadratische Gleichung

$$x^2 + (2 \cdot k - 4) \cdot x + 7 - 6 \cdot k = 0$$

1) genau eine reelle Lösung? **2)** keine reelle Lösung? **3)** zwei reelle Lösungen?

Lösung. Die Anzahl der Lösungen hängt vom Vorzeichen des folgenden Terms ab:

$$D = \frac{(2 \cdot k - 4)^2}{4} - 7 + 6 \cdot k = \frac{4 \cdot k^2 - 16 \cdot k + 16}{4} - 7 + 6 \cdot k = k^2 + 2 \cdot k - 3 = (k - 1) \cdot (k + 3)$$

1) genau eine reelle Lösung $\iff D = 0 \iff k = 1$ oder $k = -3$
2) keine reelle Lösung $\iff D < 0 \iff -3 < k < 1$
3) zwei reelle Lösungen $\iff D > 0 \iff k < -3$ oder $k > 1$ ☐

Aufgabe 2. Löse die gegebene Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

$$\sqrt{5 \cdot x + 10} = \frac{10}{\sqrt{5 \cdot x + 10}} + 3$$

Lösung. Die Gleichung ist für $x > -2$ definiert und hat die Struktur

$$u = \frac{10}{u} + 3$$

mit $u = \sqrt{5 \cdot x + 10}$. Multiplizieren mit u liefert eine quadratische Gleichung in u:

$$\underbrace{u^2 - 3 \cdot u - 10}_{=(u+2)\cdot(u-5)} = 0 \iff u = -2 \quad \text{oder} \quad u = 5$$

Die Wurzelgleichung $-2 = \sqrt{5 \cdot x + 10}$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$.
Die Wurzelgleichung $5 = \sqrt{5 \cdot x + 10}$ hat genau eine Lösung, nämlich 3.
Die Lösungsmenge der ursprünglichen Gleichung ist also $L = \{3\}$. ☐

Aufgabe 3. Gegeben ist die Funktion

$$f\colon\ ]0;\infty[\ \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = [\ln(x)]^2 - 2\cdot\ln(x) - 3.$$

a) Ermittle die Nullstellen von f.

b) Zeige, dass gilt:

$$f'(x) = 2\cdot\frac{1}{x}\cdot(\ln(x) - 1)$$

Dokumentiere dabei die Verwendung von Ableitungsregeln sorgfältig.

c) Argumentiere mit dem Vorzeichen von f', dass f an der Stelle $x_0 = e$ ein globales Minimum hat.

d) Zeige ohne Hilfe der Differentialrechnung, dass f an der Stelle $x_0 = e$ ein globales Minimum hat.

Lösung.

a) Die Gleichung $f(x) = 0$ hat die Struktur $u^2 - 2\cdot u - 3 = 0$ mit $u = \ln(x)$.

$$\underbrace{u^2 - 2\cdot u - 3}_{=(u-3)\cdot(u+1)} = 0 \iff u = -1 \quad \text{oder} \quad u = 3$$

Die Logarithmusgleichung $-1 = \ln(x)$ hat genau eine Lösung, nämlich e^{-1}.

Die Logarithmusgleichung $3 = \ln(x)$ hat genau eine Lösung, nämlich e^3.

f hat also die beiden Nullstellen $x_1 = \frac{1}{e}$ und $x_2 = e^3$.

b) Aus $[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$ und der Kettenregel folgt:

$$f'(x) = 2\cdot\ln(x)\cdot\frac{1}{x} - 2\cdot\frac{1}{x} = 2\cdot\frac{1}{x}\cdot(\ln(x) - 1)$$

c) Es gilt: $f'(x) = 0 \iff \ln(x) = 1 \iff x = e$

Da $x \mapsto \ln(x)$ streng monoton wachsend ist, wechselt f' an der Stelle $x_0 = e$ das Vorzeichen:

	$0 < x < e$	$x = e$	$e < x < \infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$

f hat also an der Stelle $x_0 = e$ ein globales Minimum.

d) Die quadratische Funktion $g(u) = u^2 - 2\cdot u - 3$ hat das globale Minimum $S = (1 \mid -4)$.

$f(x)$ ist also genau dann minimal, wenn $\ln(x) = 1$ gilt, also $x = e$. □

Aufgabe 4. Welcher Punkt des Graphen der Funktion

$$f\colon\ [0;1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 - x^2$$

hat vom Koordinatenursprung den kleinsten Abstand? Wie groß ist dieser kleinste Abstand?

Lösung. Der Satz von Pythagoras liefert den Abstand des Punkts $(x \mid f(x))$ von $(0 \mid 0)$:

$$\sqrt{x^2 + f(x)^2} = \sqrt{x^2 + (1 - x^2)^2} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1} \tag{1}$$

Die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist streng monoton wachsend.
Der Ausdruck in (**??**) ist also genau dann minimal, wenn $g(x) = x^4 - x^2 + 1$ minimal ist.

Lösungsmöglichkeit 1: Die Ableitungsfunktion

$$g'(x) = 4 \cdot x^3 - 2 \cdot x = 2 \cdot x \cdot (2 \cdot x^2 - 1) = 2 \cdot \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot x \cdot \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

wechselt an den Stellen $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0 und $\frac{1}{\sqrt{2}}$ das Vorzeichen. Im Definitionsbereich $[0; 1]$ gilt:

	$x = 0$	$0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$	$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1$
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$

Im Intervall $[0; 1]$ hat g also das globale Minimum an der Stelle $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lösungsmöglichkeit 2: Substitution $x^2 = u$ und quadratische Ergänzung:

$$x^4 - x^2 + 1 = u^2 - u + 1 = \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Der rechte Ausdruck ist genau dann minimal, wenn $u = \frac{1}{2}$ bzw. $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ gilt.
Im Intervall $[0; 1]$ hat g also das globale Minimum an der Stelle $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Der Punkt $(\frac{1}{\sqrt{2}} \mid \frac{1}{2})$ ist also jener Punkt am Graphen von f, der den kleinsten Abstand zu $(0 \mid 0)$ hat. Dieser kleinste Abstand beträgt $\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\square$

Aufgabe 5. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion so, dass $f'(0) = 0$ und $f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ gilt. Beweise mithilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung und sorgfältig dokumentierten Fallunterscheidungen, dass f *streng monoton fallend* ist.

Lösung. f ist streng monoton fallend genau dann wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x < y \implies f(x) > f(y)$$

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$.

Fall 1: $x < y \leq 0$ oder $0 \leq x < y$

Der MWS liefert eine Stelle $s \in \,]x; y[$ mit $f'(s) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} < 0$.

Da s im offenen Intervall $]x; y[$ liegt, gilt $s \neq 0$ und damit laut Voraussetzung $f'(s) < 0$.

Aus $y - x > 0$ folgt damit $f(y) - f(x) < 0$, also $f(x) > f(y)$.

Fall 2: $x < 0 < y$

Aus Fall 1 folgt insbesondere $f(x) > f(0)$ und $f(0) > f(y)$.

Also gilt: $f(x) > f(0) > f(y)$. $\square$