1. Hinweise

– Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
– Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorhergegangenen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
– Arbeitszeit: 90 Minuten
– Jede der 5 Aufgaben ist 5 Punkte wert (ohne ☆ - Bonuspunkte).
– Die mit ☆ gekennzeichneten Unterpunkte sind jeweils 2 Bonuspunkte wert.
– Wähle am Ende, welche 4 der 5 Aufgaben zur Beurteilung herangezogen werden sollen:

☐ Aufgabe 1 ☐ Aufgabe 2 ☐ Aufgabe 3 ☐ Aufgabe 4 ☐ Aufgabe 5

2. Aufgaben

Aufgabe 1. Löse die Gleichung

$$3^{(2\cdot x+2)^2}\cdot 9^{x-\frac{7}{2}} = 27^{(x+2)^2}$$

über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

Lösung.

$$\begin{aligned}
\iff\quad & 3^{(2\cdot x+2)^2}\cdot \left(3^2\right)^{x-\frac{7}{2}} = \left(3^3\right)^{(x+2)^2} && \\
\iff\quad & 3^{4\cdot x^2+8\cdot x+4}\cdot 3^{2\cdot(x-\frac{7}{2})} = 3^{3\cdot(x^2+4\cdot x+4)} && \text{Rechenregeln für Potenzen} \\
\iff\quad & 3^{4\cdot x^2+8\cdot x+4+2\cdot x-7} = 3^{3\cdot x^2+12\cdot x+12} && \\
\iff\quad & 4\cdot x^2+10\cdot x-3 = 3\cdot x^2+12\cdot x+12 && x\mapsto 3^x \text{ injektiv} \\
\iff\quad & \underbrace{x^2-2\cdot x-15}_{=(x+3)\cdot(x-5)} = 0 && \\
\iff\quad & x=-3 \ \vee\ x=5 && \text{Produkt-Null-Satz}
\end{aligned}$$

Die Gleichung hat also die Lösungsmenge $L=\{-3;5\}$. ☐

Aufgabe 2. Zerlege das Polynom

$$6\cdot x^3-19\cdot x^2+9\cdot x+10$$

in Linearfaktoren.

Lösung. Wir suchen zunächst nach ganzzahligen Nullstellen von $p(x) = 6 \cdot x^3 - 19 \cdot x^2 + 9 \cdot x + 10$. Ganzzahlige Nullstellen müssen Teiler von 10 sein, also $\{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$. Warum?

x	1	-1	2	-2	5	-5	10	-10
$p(x)$	6	-24	0	-132	330	-1260	4200	-7980

Es gilt also:

$$6 \cdot x^3 - 19 \cdot x^2 + 9 \cdot x + 10 = 6 \cdot (x - 2) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

Wir dividieren beide Seiten durch den Linearfaktor $(x - 2)$:

$$\begin{array}{l}
\ominus \begin{cases} (6 \cdot x^3 - 19 \cdot x^2 + 9 \cdot x + 10) : (x - 2) = 6 \cdot x^2 - 7 \cdot x - 5 \\ 6 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2 \end{cases} \\
\qquad \ominus \begin{cases} -7 \cdot x^2 + 9 \cdot x + 10 \\ -7 \cdot x^2 + 14 \cdot x \end{cases} \\
\qquad\qquad \ominus \begin{cases} -5 \cdot x + 10 \\ -5 \cdot x + 10 \end{cases} \\
\qquad\qquad\qquad 0 \text{ Rest}
\end{array}$$

Die anderen beiden Nullstellen x_2 und x_3 sind die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$6 \cdot x^2 - 7 \cdot x - 5 = 0,$$

also

$$x_{2,3} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{12} = \frac{7 \pm 13}{12} \implies x_2 = \frac{5}{3},\ x_3 = -\frac{1}{2}$$

Die gesuchte Zerlegung in Linearfaktoren ist also

$$6 \cdot x^3 - 19 \cdot x^2 + 9 \cdot x + 10 = 6 \cdot (x - 2) \cdot \left(x - \frac{5}{3}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right).$$

□

Aufgabe 3. Sei $k \in \mathbb{R}$ ein Parameter und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x) = x^3 - 3 \cdot k \cdot x.$$

a) Angenommen, $k < 0$. Ermittle das Monotonieverhalten von f.
b) Angenommen, $k \geq 0$. Ermittle das Monotonieverhalten von f.
c) Für welche Werte von $k \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung

$$x^3 = 3 \cdot k \cdot x + 16$$

jeweils genau **1)** eine Lösung **2)** zwei Lösungen **3)** drei Lösungen über der Grundmenge $\mathbb{R}$?

Lösung.

a) Wir berechnen die Ableitungsfunktion:

$$f'(x) = 3 \cdot x^2 - 3 \cdot k = 3 \cdot (x^2 - k)$$

Wenn $k < 0$ ist, dann gilt also $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
f ist also auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

b) $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 3 \cdot k$

$$f'(x) = 0 \quad \iff \quad x^2 = k \quad \iff \quad x = \pm\sqrt{k}$$

Wir zerlegen f' in Linearfaktoren:

$$f'(x) = 3 \cdot \left(x + \sqrt{k}\right) \cdot \left(x - \sqrt{k}\right)$$

Monotonieverhalten von f:

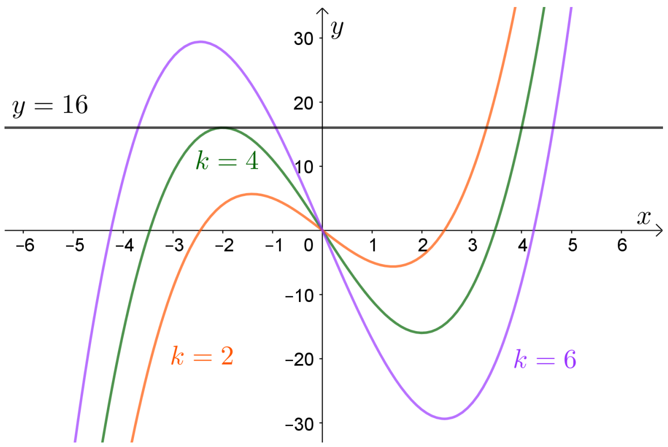
	$x < -\sqrt{k}$	$x = -\sqrt{k}$	$-\sqrt{k} < x < \sqrt{k}$	$x = \sqrt{k}$	$x > \sqrt{k}$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$2 \cdot k^{\frac{3}{2}}$	$\searrow$	$-2 \cdot k^{\frac{3}{2}}$	$\nearrow$

c) Die Lösungen der gegebenen Gleichung sind genau die Lösungen der Gleichung $f(x) = 16$.
Es gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Da f stetig ist folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass die Gleichung $f(x) = 16$ mindestens eine Lösung in $\mathbb{R}$ hat.

Wenn $k < 0$ ist, dann ist f streng monoton wachsend.
Die Gleichung $f(x) = 16$ hat also genau eine Lösung.

Wenn $k \geq 0$ ist, dann hängt die Anzahl der Lösungen vom lokalen Maximum $(-\sqrt{k} \mid 2 \cdot k^{\frac{3}{2}})$ ab:

- $2 \cdot k^{\frac{3}{2}} < 16 \iff 0 \leq k < 4 \iff$ genau eine Lösung
- $2 \cdot k^{\frac{3}{2}} = 16 \iff k = 4 \iff$ genau zwei Lösungen
- $2 \cdot k^{\frac{3}{2}} > 16 \iff k > 4 \iff$ genau drei Lösungen



□

Aufgabe 4.

a) Seien a, b, $c \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = e^{-x} \cdot (a \cdot x^2 + b \cdot x + c)$.
Zeige, dass

$$f'(x) = e^{-x} \cdot [-a \cdot x^2 + (2 \cdot a - b) \cdot x + b - c].$$

Dokumentiere dabei die Verwendung von Ableitungsregeln sorgfältig.

b) Ermittle eine Stammfunktion von $g(x) = e^{-x} \cdot (x^2 - 3 \cdot x + 1)$.

c) ☆ Ermittle eine Stammfunktion von $h(x) = e^{2 \cdot x} \cdot (3 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3)$.

Lösung.

a) Kettenregel: $(e^{-x})' = e^{-x} \cdot (-1)$
Produktregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} \cdot (-1) \cdot (a \cdot x^2 + b \cdot x + c) + e^{-x} \cdot (2 \cdot a \cdot x + b) = \\ &= e^{-x} \cdot [-a \cdot x^2 + (2 \cdot a - b) \cdot x + b - c] \end{aligned}$$

b) Gesucht ist also eine Funktion G mit $G'(x) = e^{-x} \cdot (x^2 - 3 \cdot x + 1)$.
Koeffizientenvergleich von G' mit f' aus **a)** liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} -a = 1 \\ 2 \cdot a - b = -3 \\ b - c = 1 \end{cases}$$

mit der Lösung $a = -1$, $b = 1$, $c = 0$.
$G(x) = e^{-x} \cdot (-x^2 + x)$ ist also eine Stammfunktion von G.

c) Ansatz: $H(x) = e^{2 \cdot x} \cdot (a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d)$

$$\begin{aligned} H'(x) &= e^{2 \cdot x} \cdot 2 \cdot (a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d) + e^{2 \cdot x} \cdot (3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c) = \\ &= e^{2 \cdot x} \cdot \Big[2 \cdot a \cdot x^3 + (3 \cdot a + 2 \cdot b) \cdot x^2 + (2 \cdot b + 2 \cdot c) \cdot x + 2 \cdot d + c\Big] \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich von H' mit h liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} 2 \cdot a = 2 \\ 3 \cdot a + 2 \cdot b = 3 \\ 2 \cdot b + 2 \cdot c = 0 \\ c + 2 \cdot d = 0 \end{cases}$$

mit der Lösung $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$.
$H(x) = e^{2 \cdot x} \cdot x^3$ ist also eine Stammfunktion von h. □

Aufgabe 5. Das folgende Lemma soll grafisch veranschaulicht, bewiesen und angewendet werden.

Lemma: Sei $f\colon]a;b[\to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion so, dass ihre Ableitungsfunktion $f'\colon]a;b[\to \mathbb{R}$ monoton wachsend ist.

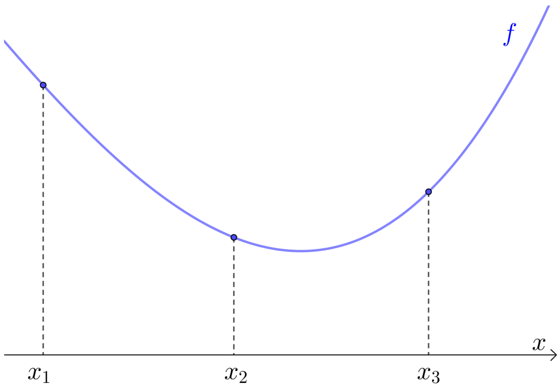
(i) Seien $x_1, x_2, x_3 \in]a;b[$ mit $x_1 < x_2 < x_3$. Dann gilt:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2) \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

(ii) Sei $x_0 \in]a;b[$. Dann gilt: Für alle $x \in]a;b[$ ist

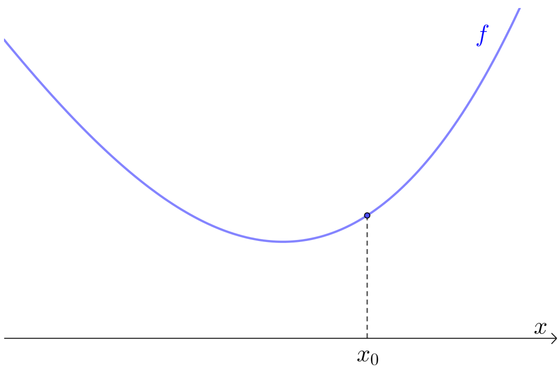
$$(x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0) \leq f(x).$$

a) Die Funktion f, deren Graph unten abgebildet ist, erfüllt die Voraussetzungen des Lemmas. Veranschauliche Behauptung (i) des Lemmas in dieser Abbildung.



b) Beweise Behauptung (i) des Lemmas. Tipp: Mittelwertsatz der Differentialrechnung

c) Die Funktion f, deren Graph unten abgebildet ist, erfüllt die Voraussetzungen des Lemmas. Veranschauliche Behauptung (ii) des Lemmas in dieser Abbildung.



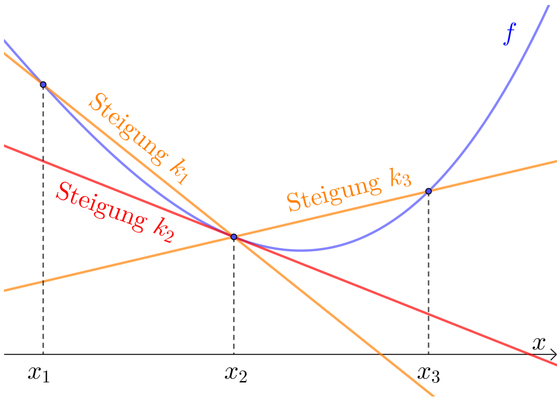
d) Beweise Behauptung (ii) des Lemmas. Tipp: Unterscheide die Fälle $x < x_0$, $x = x_0$ und $x > x_0$ und verwende (i).

e) ☆ Zeige, dass für alle reellen Zahlen $x > 0$ gilt:

$$x - 1 \leq x \cdot \ln(x)$$

Lösung.

a) k_1 = Steigung der Sekante durch $(x_1 \mid f(x_1))$ und $(x_2 \mid f(x_2))$
k_2 = Steigung der Tangente im Punkt $(x_2 \mid f(x_2))$
k_3 = Steigung der Sekante durch $(x_2 \mid f(x_2))$ und $(x_3 \mid f(x_3))$
Die Ungleichung besagt, dass $k_1 \leq k_2 \leq k_3$.



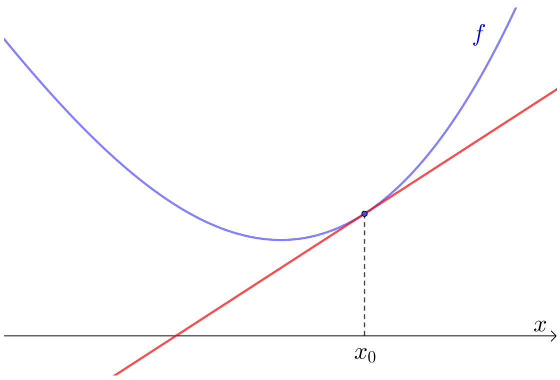
b) Der MWS liefert eine Stelle $s \in [x_1; x_2]$ mit $f'(s) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.
Laut Voraussetzung ist f' monoton wachsend, also gilt:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(s) \leq f'(x_2)$$

Genauso liefert der MWS eine Stelle $t \in [x_2; x_3]$ mit $f'(t) = \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$.
Damit gilt auch die zweite Ungleichung:

$$f'(x_2) \leq f'(t) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

c) Die Tangente im Punkt $(x_0 \mid f(x_0))$ ist an jeder Stelle unterhalb des Funktionsgraphen oder auf gleicher Höhe:



d) Wenn $x = x_0$ ist, dann stimmt die behauptete Ungleichung $0 + f(x_0) \leq f(x_0)$.
Wenn $x > x_0$ ist, dann folgt aus (i)

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \iff \quad (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0) \leq f(x)$$

Wenn $x < x_0$ ist, dann folgt aus (i)

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq f'(x_0) \quad \iff \quad f(x_0) - f(x) \leq f'(x_0) \cdot (x_0 - x) \quad \iff$$
$$\iff \quad (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0) \leq f(x)$$

e) Die Funktion $f(x) = x \cdot \ln(x)$ erfüllt die Voraussetzungen des Lemmas:

$$f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

ist monoton wachsend für alle $x > 0$, weil die natürliche Logarithmusfunktion ln monoton wachsend ist.
Aus (ii) folgt mit der Stelle $x_0 = 1$ die behauptete Ungleichung:

$$(x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0) \leq f(x) \quad \iff \quad (x - 1) \cdot 1 + 0 \leq x \cdot \ln(x) \quad \iff \quad x - 1 \leq x \cdot \ln(x)$$

$\square$