1. Hinweise

– Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
– Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorhergegangenen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
– Arbeitszeit: 90 Minuten
– Jede der 5 Aufgaben ist 5 Punkte wert (ohne ★ - Bonuspunkte).
– Die mit ★ gekennzeichneten Unterpunkte sind jeweils 2 Bonuspunkte wert.
– Wähle am Ende, welche 4 der 5 Aufgaben zur Beurteilung herangezogen werden sollen:

☐ Aufgabe 1 ☐ Aufgabe 2 ☐ Aufgabe 3 ☐ Aufgabe 4 ☐ Aufgabe 5

2. Aufgaben

Aufgabe 1. Löse die Gleichung

$$\frac{4^{2\cdot x^2+5\cdot x}}{2^{2\cdot x+9}} = 8^{x^2+2\cdot x-2}$$

über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

Lösung.

$$\begin{aligned}
\iff && 2^{2\cdot(2\cdot x^2+5\cdot x)} &= 2^{3\cdot(x^2+2\cdot x-2)}\cdot 2^{2\cdot x+9} && \text{Rechenregeln für Potenzen}\\
\iff && 2^{4\cdot x^2+10\cdot x} &= 2^{3\cdot x^2+6\cdot x-6+2\cdot x+9} && \text{Rechenregeln für Potenzen}\\
\iff && 4\cdot x^2+10\cdot x &= 3\cdot x^2+8\cdot x+3 && x\mapsto 2^x \text{ injektiv}\\
\iff && \underbrace{x^2+2\cdot x-3}_{=(x-1)\cdot(x+3)} &= 0 &&\\
\iff && x=1 \ \lor\ x=-3 & && \text{Produkt-Null-Satz}
\end{aligned}$$

Die Gleichung hat also die Lösungsmenge $L=\{-3;1\}$. ☐

Aufgabe 2. Löse die Gleichung

$$\sqrt{x+4}+\sqrt{x-3}-\sqrt{2\cdot x+25}=0$$

über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

Lösung.

$$\begin{aligned}
\iff \quad && \sqrt{x+4}+\sqrt{x-3} &= \sqrt{2\cdot x+25}\\
\implies \quad && x+4+2\cdot\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{x-3}+x-3 &= 2\cdot x+25\\
\iff \quad && \sqrt{x+4}\cdot\sqrt{x-3} &= 12\\
\implies \quad && (x+4)\cdot(x-3) &= 144\\
\iff \quad && \underbrace{x^2+x-156}_{=(x-12)\cdot(x+13)} &= 0\\
\iff \quad && x=12 \ \vee \ x=-13 &
\end{aligned}$$

Als Lösungen der ursprünglichen Gleichung kommen damit nur $x_1=12$ und $x_2=-13$ in Frage. Wir prüfen mit einer Probe, ob es sich um tatsächliche Lösungen handelt:

1) $x_1=12$ ist eine Lösung, weil $\sqrt{16}+\sqrt{9}-\sqrt{49}=4+3-7=0$ ✓

2) Bei $x_2=-13$ treten negative Radikanden auf. 13 ist also nicht in der Definitionsmenge der Gleichung enthalten und kann damit keine Lösung sein.

Bei welchem Schritt hat sich -13 als Lösungskandidat dazugeschwindelt?

Die Gleichung hat also die Lösungsmenge $L=\{12\}$. □

Aufgabe 3. Es gibt eine quadratische Funktion f mit den folgenden beiden Eigenschaften:

i) $2 \cdot x - y = -6$ ist eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 0$.

ii) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 8$

Ermittle die Gleichung von f.

Lösung. Da f eine quadratische Funktion ist, gilt:

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

i) Die Tangentengleichung $y = 2 \cdot x + 6$ an der Stelle 0 liefert zwei Informationen:

$$f(0) = 6 \implies c = 6$$
$$f'(0) = 2 \implies 2 \cdot a \cdot 0 + b = 2 \implies b = 2$$

ii) Es gilt:

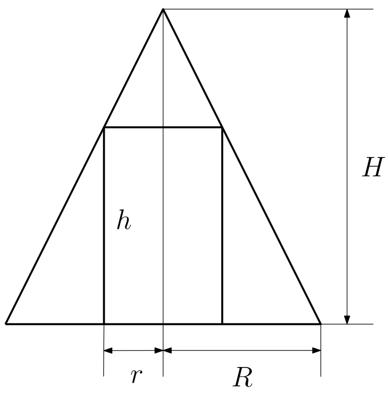
$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = a \cdot \frac{x^3}{3} + b \cdot \frac{x^2}{2} + c \cdot x\,\Big|_0^1 = a \cdot \frac{1}{3} + b \cdot \frac{1}{2} + c = \frac{a}{3} + 7$$

Aus $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 8$ folgt damit $a = 3$.

Die gesuchte Funktionsgleichung ist also $f(x) = 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 6$.

□

Aufgabe 4. Einem Drehkegel mit Radius $R = 42\,\text{cm}$ und Höhe $H = 126\,\text{cm}$ werden Drehzylinder wie im Bild eingeschrieben. Gesucht sind die Abmessungen jenes Drehzylinders mit maximalem Volumen.



r ist der Zylinderradius in cm.

$V(r)$ ist das Zylindervolumen in cm^3.

1) Zeige, dass

$$V(r) = 126 \cdot \pi \cdot r^2 - 3 \cdot \pi \cdot r^3$$

gilt.

2) Ermittle das Monotonieverhalten von V in $]0; 42[$.

3) Ermittle den Radius und die Höhe jenes Drehzylinders mit maximalem Volumen.

Lösung.

1) Für das Volumen V des Drehzylinders gilt:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

Für die Seitenlängen ähnlicher Dreiecke gilt (Strahlensatz):

$$\frac{H}{R} = \frac{h}{R - r} \iff h = (R - r) \cdot \frac{H}{R} \iff h = (42 - r) \cdot 3$$

Wir setzen in die Volumsformel ein:

$$V(r) = r^2 \cdot \pi \cdot (42 - r) \cdot 3 = 126 \cdot \pi \cdot r^2 - 3 \cdot \pi \cdot r^3 \checkmark$$

2) Wir berechnen die Ableitung von V und faktorisieren:

$$V'(r) = 252 \cdot \pi \cdot r - 9 \cdot \pi \cdot r^2 = 9 \cdot \pi \cdot r \cdot (28 - r)$$

Damit gilt:

$$V'(r) = 0 \iff r = 0 \quad \text{oder} \quad r = 28$$

Wir ermitteln das Monotonieverhalten von V:

	$0 < r < 28$	$r = 28$	$28 < r < 42$
$V'(r)$	$+$	0	$-$
$V(r)$	$\nearrow$	$32\,928 \cdot \pi$	$\searrow$

3) Aus dem Monotonieverhalten von V folgt, dass der Drehzylinder mit maximalem Volumen den Radius $r = 28\,\text{cm}$ und die Höhe $h = 42\,\text{cm}$ hat.

□

Aufgabe 5. Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$$

a) Zeige, dass $f'(x) = x \cdot (2 - x) \cdot e^{-x}$ gilt.
Dokumentiere dabei die Verwendung von Ableitungsregeln sorgfältig.

b) Ermittle die Nullstellen der Funktion f'.

c) Diskutiere das Monotonieverhalten der Funktion f.

d) Zeige, dass es Zahlen a, b, $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass die Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = (a \cdot x^2 + b \cdot x + c) \cdot e^{-x}$$

eine Stammfunktion von f ist. Welche Werte haben die Zahlen a, b und c mit dieser Eigenschaft?

e) ☆ Begründe sorgfältig, dass die Gleichung

$$x^2 = \frac{1}{2} \cdot e^x$$

genau drei Lösungen über der Grundmenge $\mathbb{R}$ hat.

Tipp: Verwende das Monotonieverhalten von f und den Zwischenwertsatz.

Lösung.

a) Kettenregel:

$$\left(e^{-x}\right)' = e^{-x} \cdot (-1)$$

Produktregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = \\ &= e^{-x} \cdot (2 \cdot x - x^2) \\ &= e^{-x} \cdot x \cdot (2 - x) \checkmark \end{aligned}$$

b) Aus $e^{-x} > 0$ und dem Produkt-Null-Satz folgt, dass f' ausschließlich die Nullstellen 0 und 2 hat.

c) Wir ermitteln das Monotonieverhalten von f:

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4 \cdot e^{-2}$	$\searrow$

d) Wir ermitteln die Ableitung von F mithilfe der Produktregel und der Kettenregel:

$$F'(x) = (2 \cdot a \cdot x + b) \cdot e^{-x} + (a \cdot x^2 + b \cdot x + c) \cdot e^{-x} \cdot (-1) =$$
$$= [-a \cdot x^2 + (2 \cdot a - b) \cdot x + (b - c)] \cdot e^{-x}$$

Wir vergleichen die Koeffizienten in $F'(x) = f(x)$ und erhalten:

$$a = -1 \implies b = -2 \implies c = -2$$

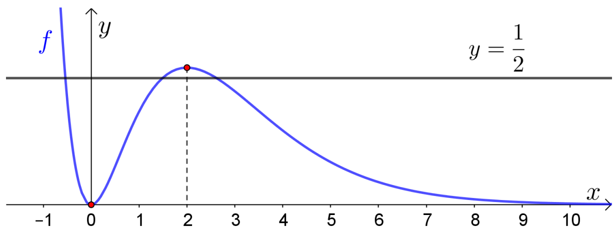
e) Es gilt:

$$x^2 = \frac{1}{2} \cdot e^x \iff x^2 \cdot e^{-x} = \frac{1}{2} \iff f(x) = \frac{1}{2}$$

Aus dem Monotonieverhalten von f folgt:

i) $(0 \mid 0)$ ist ein lokales Minimum von f.

ii) $(2 \mid \underbrace{4 \cdot e^{-2}}_{=0{,}54...})$ ist ein lokales Maximum von f.



Weiters gilt:

iii) $f(-1) = e = 2{,}71... > \frac{1}{2}$
(bzw. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$)

iv) $f(3) = 9 \cdot e^{-3} = 0{,}44... < \frac{1}{2}$
(bzw. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$)

Da f überall definiert ist, folgt aus dem Monotonieverhalten, dass es in jedem der 3 Intervalle

$$]-\infty; 0[, \quad]0; 2[\quad \text{und} \quad]2; \infty[$$

höchstens eine Stelle mit Funktionswert $\frac{1}{2}$ gibt.
Aus der Stetigkeit von f und dem Zwischenwertsatz folgt, dass es in jedem der 3 Intervalle

$$]-\infty; 0[, \quad]0; 2[\quad \text{und} \quad]2; \infty[$$

mindestens eine Stelle mit Funktionswert $\frac{1}{2}$ gibt.
Also hat die Gleichung $f(x) = \frac{1}{2}$ *genau drei* Lösungen.

□