Name: ____________________________ Matrikelnummer: ____________________

1. Hinweise

- Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
- Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorhergegangenen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
- Arbeitszeit: 90 Minuten
- Jede der 5 Aufgaben ist 5 Punkte wert (ohne ★ - Bonuspunkte).
- Die mit ★ gekennzeichneten Unterpunkte sind jeweils 2 Bonuspunkte wert.
- Die besten 4 der 5 Aufgaben werden zur Beurteilung herangezogen.

2. Aufgaben

Aufgabe 1. Löse die Gleichung

$$x^5 - 5 \cdot x^3 - 36 \cdot x = 0$$

über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

Lösung. Wir heben x auf der linken Seite heraus:

$$x \cdot (x^4 - 5 \cdot x^2 - 36) = 0$$

Aus dem Produkt-Null-Satz folgt, dass $x_1 = 0$ eine Lösung der Gleichung ist.
Um die Lösungen von $x^4 - 5 \cdot x^2 - 36 = 0$ zu berechnen, substituieren wir $u = x^2$:

$$\underbrace{u^2 - 5 \cdot u - 36}_{=(u-9)\cdot(u+4)} = 0$$

Aus dem Produkt-Null-Satz folgt, dass $u = 9$ oder $u = -4$ gelten muss:

$$u = 9 \iff x^2 = 9 \iff x = \pm 3$$

Also sind $x_2 = -3$ und $x_3 = 3$ Lösungen der ursprünglichen Gleichung.

$$u = -4 \iff x^2 = -4$$

Die Gleichung $x^2 = -4$ hat keine reellen Lösungen.
Die Lösungsmenge L der ursprünglichen Gleichung ist also $L = \{-3, 0, 3\}$. $\square$

Aufgabe 2. Gegeben sind die differenzierbaren Funktionen p und f mit:

$$p(x) = f(x) \cdot e^{f(x)}$$

1) Zeige, dass $p'(x) = f'(x) \cdot e^{f(x)} \cdot (1 + f(x))$ gilt.
Dokumentiere dabei die Verwendung von Ableitungsregeln sorgfältig.

2) Diskutiere das Monotonieverhalten der Funktion p mit:

$$p(x) = (x^2 - 2 \cdot x - 9) \cdot e^{x^2 - 2 \cdot x - 9}$$

Lösung.

1) Die Funktion p ist ein Produkt der Funktionen f und g mit $g(x) = e^{f(x)}$.
Wir differenzieren mithilfe der Produktregel:

$$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Die Ableitung g' ermitteln wir mithilfe der Kettenregel:

$$g'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

Daraus folgt:

$$p'(x) = f'(x) \cdot e^{f(x)} + f(x) \cdot e^{f(x)} \cdot f'(x) = f'(x) \cdot e^{f(x)} \cdot (1 + f(x))$$

2) Für die gegebene Funktion p gilt:

$$p(x) = f(x) \cdot e^{f(x)} \quad \text{mit} \quad f(x) = x^2 - 2 \cdot x - 9$$

Mithilfe von **1)** können wir p' ermitteln:

$$p'(x) = f'(x) \cdot e^{f(x)} \cdot (1 + f(x)) = \underbrace{(2 \cdot x - 2)}_{=2\cdot(x-1)} \cdot e^{x^2 - 2 \cdot x - 9} \cdot \underbrace{(x^2 - 2 \cdot x - 8)}_{=(x+2)\cdot(x-4)}$$

Die Ableitung p' hat also ihre Nullstellen bei -2, 1 und 4.
Wir ermitteln das Monotonieverhalten von p:

	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
$2 \cdot x - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$e^{x^2-2\cdot x-9}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 2 \cdot x - 8$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$p'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$p(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$-\frac{10}{e^{10}}$	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$

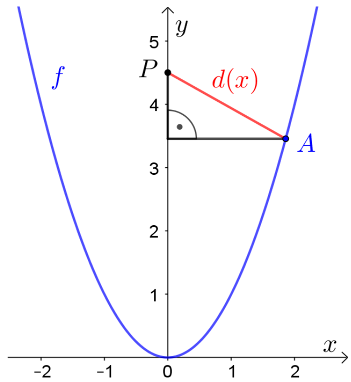
$\square$

Aufgabe 3. Welche Punkte des Funktionsgraphen von

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

haben vom Punkt $P = \left(0 \mid \frac{9}{2}\right)$ den kleinsten Abstand?

Lösung. Wir wählen einen beliebigen Punkt $A = (x \mid x^2)$ am Funktionsgraphen von f.



Sein Abstand d vom Punkt P hängt von seiner x-Koordinate ab. Aus dem Satz von Pythagoras folgt:

$$d(x)^2 = x^2 + \left(x^2 - \frac{9}{2}\right)^2 \overset{d(x)>0}{\iff} d(x) = \sqrt{x^2 + \left(x^2 - \frac{9}{2}\right)^2}$$

Gesucht sind die Stellen, an denen d den kleinsten Funktionswert annimmt.

Aus der Monotonie von ☺ $\mapsto \sqrt{☺}$ folgt, dass die Funktion d den kleinsten Funktionswert an den gleichen *Stellen* annimmt wie die Funktion r mit:

$$r(x) = x^2 + \left(x^2 - \frac{9}{2}\right)^2 = x^2 + x^4 - 9 \cdot x^2 + \frac{81}{4} = x^4 - 8 \cdot x^2 + \frac{81}{4}$$

Wir berechnen den kleinsten Funktionswert von r mithilfe der Differentialrechnung:

$$r'(x) = 4 \cdot x^3 - 16 \cdot x = x \cdot (4 \cdot x^2 - 16) = x \cdot 4 \cdot (x-2) \cdot (x+2)$$

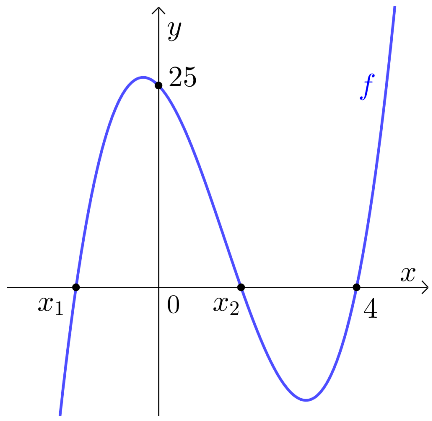
Die Funktion r' hat also ihre Nullstellen bei $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 2$.
Wir ermitteln das Monotonieverhalten von r:

	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$r'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$r(x)$	$\searrow$	$r(-2)$	$\nearrow$	$r(0)$	$\searrow$	$r(2)$	$\nearrow$

An den Stellen -2 und 2 hat die Funktion r – und damit auch die Funktion d – ein lokales Minimum.
Weiters gilt $d(-2) = d(2)$.
Da die Funktion d stetig ist, folgt aus dem Monotonieverhalten, dass d an den Stellen -2 und 2 jeweils den (global) kleinsten Funktionswert annimmt.
Die gesuchten Punkte am Funktionsgraphen von f sind also $(-2 \mid 4)$ und $(2 \mid 4)$.

Alternative Lösung: $d(y) = \sqrt{y + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2}$ hat den kleinsten Funktionswert an der Stelle $y = 4$. □

Aufgabe 4. Die dargestellte Polynomfunktion f hat Grad 3.



Die Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit den Koordinatenachsen sind rechts eingezeichnet.

Die Nullstellen x_1 und x_2 liegen symmetrisch zum Koordinatenursprung.

Weiters gilt: $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$

Berechne die Nullstellen x_1 und x_2.

Lösung. Aus den Nullstellen x_1, $x_2 = -x_1$ und $x_3 = 4$ stellen wir die Linearfaktorform von f auf:

$$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x + x_1) \cdot (x - 4)$$

Aus $f(0) = 25$ folgt:

$$a \cdot (-x_1) \cdot x_1 \cdot (-4) = 25 \iff a \cdot x_1^2 = \frac{25}{4}$$

Wir multiplizieren den Funktionsterm von f aus und setzen ein:

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot (x^2 - x_1^2) \cdot (x - 4) = \\ &= a \cdot x^3 - 4 \cdot a \cdot x^2 - a \cdot x_1^2 \cdot x + 4 \cdot a \cdot x_1^2 = \\ &= a \cdot x^3 - 4 \cdot a \cdot x^2 - \frac{25}{4} \cdot x + 25 \end{aligned}$$

Wir berechnen das bestimmte Integral von f in $[0; 2]$:

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^4 a \cdot x^3 - 4 \cdot a \cdot x^2 - \frac{25}{4} \cdot x + 25\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{a}{4} \cdot x^4 - \frac{4 \cdot a}{3} \cdot x^3 - \frac{25}{8} \cdot x^2 + 25 \cdot x \,\Big|_0^4 = \\ &= 64 \cdot a - \frac{256 \cdot a}{3} - 50 + 100 = \\ &= -\frac{64 \cdot a}{3} + 50 \end{aligned}$$

Aus $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ folgt:

$$-\frac{64 \cdot a}{3} + 50 = 2 \iff 48 = \frac{64 \cdot a}{3} \iff a = \frac{9}{4}$$

Wir setzen ein und erhalten:

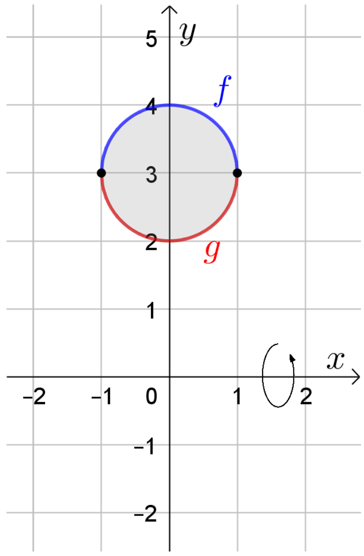
$$a \cdot x_1^2 = \frac{25}{4} \iff x_1^2 = \frac{25}{9}$$

Die Nullstellen sind also $x_1 = -\frac{5}{3}$ und $x_2 = \frac{5}{3}$. □

Aufgabe 5. Die Lösungen der Gleichung

$$x^2 + (y-3)^2 = 1$$

liegen auf der rechts dargestellten Kreislinie.
Die obere Kreislinie ist der Graph einer Funktion f.
Die untere Kreislinie ist der Graph einer Funktion g.



1) Ermittle jeweils eine Funktionsgleichung von f und von g.

Wenn die Kreisscheibe um die horizontale Achse rotiert, dann entsteht ein *Torus*.

2) Berechne das Volumen dieses Torus.
Hinweis: Du darfst $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$ verwenden.

3) ☆ Begründe, warum $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$ gilt.

Lösung.

1) Wir formen die Kreisgleichung auf y um:

$$(y-3)^2 = 1-x^2 \iff y-3 = \pm\sqrt{1-x^2} \iff y = 3 \pm \sqrt{1-x^2}$$

Die gesuchten Funktionsgleichungen sind also:

$$f(x) = 3+\sqrt{1-x^2} \qquad g(x) = 3-\sqrt{1-x^2}$$

2) Für das gesuchte Rotationsvolumen V gilt:

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_{-1}^{1} f(x)^2\,\mathrm{d}x - \pi \cdot \int_{-1}^{1} g(x)^2\,\mathrm{d}x = \\ &= \pi \cdot \int_{-1}^{1} [f(x)^2 - g(x)^2]\,\mathrm{d}x = \\ &= 2\cdot\pi\cdot\int_0^1 [f(x)^2 - g(x)^2]\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Wir vereinfachen den Integranden:

$$\begin{aligned} f(x)^2 - g(x)^2 &= \left[3+\sqrt{1-x^2}\right]^2 - \left[3-\sqrt{1-x^2}\right]^2 = \\ &= \left[9+6\cdot\sqrt{1-x^2}+(1-x^2)\right] - \left[9-6\cdot\sqrt{1-x^2}+(1-x^2)\right] = \\ &= 12\cdot\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

$$\implies V = 2\cdot\pi\cdot\int_0^1 12\cdot\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = 24\cdot\pi\cdot\frac{\pi}{4} = 6\cdot\pi^2$$

3) Lösungsmöglichkeit 1: Der Graph von $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ ist die obere Kreislinie vom Einheitskreis.
Das bestimmte Integral ist ein Viertel des Flächeninhalts vom Einheitskreis, also $\frac{\pi}{4}$.
Lösungsmöglichkeit 2: Das bestimmte Integral mit den Integrationsmethoden berechnen.
Hinweis: Substitution $x = \sin(u)$ und partielle Integration □