Name: ______________________________ Matrikelnummer: ____________________

1. Hinweise

– Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
– Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorhergegangenen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
– Arbeitszeit: 90 Minuten
– Jede der 5 Aufgaben ist 5 Punkte wert (ohne ☆ - Bonuspunkte).
– Die mit ☆ gekennzeichneten Unterpunkte sind jeweils 2 Bonuspunkte wert.
– Die besten 4 der 5 Aufgaben werden zur Beurteilung herangezogen.

2. Aufgaben

Aufgabe 1. Löse die Gleichung

$$x^5 - 5 \cdot x^3 - 36 \cdot x = 0$$

über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

Aufgabe 2. Gegeben sind die differenzierbaren Funktionen p und f mit:

$$p(x) = f(x) \cdot e^{f(x)}$$

1) Zeige, dass $p'(x) = f'(x) \cdot e^{f(x)} \cdot (1 + f(x))$ gilt.
Dokumentiere dabei die Verwendung von Ableitungsregeln sorgfältig.
2) Diskutiere das Monotonieverhalten der Funktion p mit:

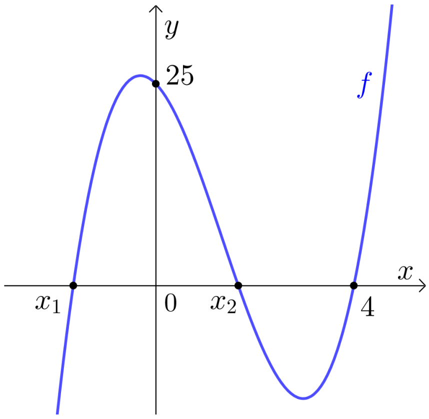
$$p(x) = (x^2 - 2 \cdot x - 9) \cdot e^{x^2 - 2 \cdot x - 9}$$

Aufgabe 3. Welche Punkte des Funktionsgraphen von

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

haben vom Punkt $P = \left(0 \mid \frac{9}{2}\right)$ den kleinsten Abstand?

Aufgabe 4. Die dargestellte Polynomfunktion f hat Grad 3.



Die Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit den Koordinatenachsen sind rechts eingezeichnet.

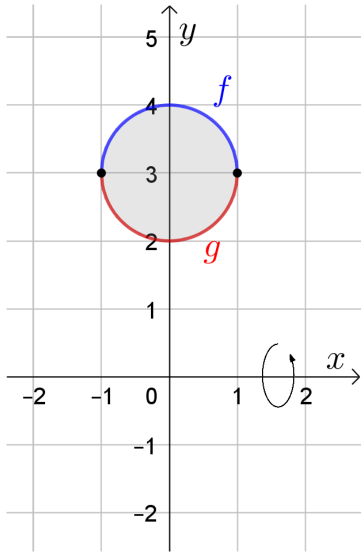
Die Nullstellen x_1 und x_2 liegen symmetrisch zum Koordinatenursprung.

Weiters gilt: $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$

Berechne die Nullstellen x_1 und x_2.

Aufgabe 5. Die Lösungen der Gleichung

$$x^2 + (y-3)^2 = 1$$



liegen auf der rechts dargestellten Kreislinie.
Die obere Kreislinie ist der Graph einer Funktion f.
Die untere Kreislinie ist der Graph einer Funktion g.

1) Ermittle jeweils eine Funktionsgleichung von f und von g.

Wenn die Kreisscheibe um die horizontale Achse rotiert, dann entsteht ein *Torus*.

2) Berechne das Volumen dieses Torus.
Hinweis: Du darfst $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$ verwenden.

3) ☆ Begründe, warum $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$ gilt.