Name: ______________________ Matrikelnummer: ______________

1. Hinweise

– Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
– Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorhergegangenen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
– Arbeitszeit: 90 Minuten
– Jede der 5 Aufgaben ist 5 Punkte wert (ohne ☆ - Bonuspunkte).
– Die mit ☆ gekennzeichneten Unterpunkte sind jeweils 2 Bonuspunkte wert.
– Die besten 4 der 5 Aufgaben werden zur Beurteilung herangezogen.

2. Aufgaben

Aufgabe 1. Für welche Werte von $k \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung

$$x^2 + (2 \cdot k - 2) \cdot x + 1 - 6 \cdot k = 0$$

1) genau eine reelle Lösung? **2)** keine reelle Lösung? **3)** zwei reelle Lösungen?

Lösung. Da es sich um eine quadratische Gleichung handelt, hängt die Anzahl der Lösungen vom Vorzeichen des folgenden Terms ab:

$$\begin{aligned} D &= (2 \cdot k - 2)^2 - 4 \cdot (1 - 6 \cdot k) = \\ &= 4 \cdot k^2 - 8 \cdot k + 4 - 4 + 24 \cdot k = \\ &= 4 \cdot k^2 + 16 \cdot k = \\ &= 4 \cdot k \cdot (k + 4) \end{aligned}$$

	$k < -4$	$k = -4$	$-4 < k < 0$	$k = 0$	$k > 0$
D	$+$	0	$-$	0	$+$

1) genau eine reelle Lösung $\iff D = 0 \iff k = -4$ oder $k = 0$
2) keine reelle Lösung $\iff D < 0 \iff -4 < k < 0$
3) zwei reelle Lösungen $\iff D > 0 \iff k < -4$ oder $k > 0$ □

Aufgabe 2. Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem in den Variablen x und y:

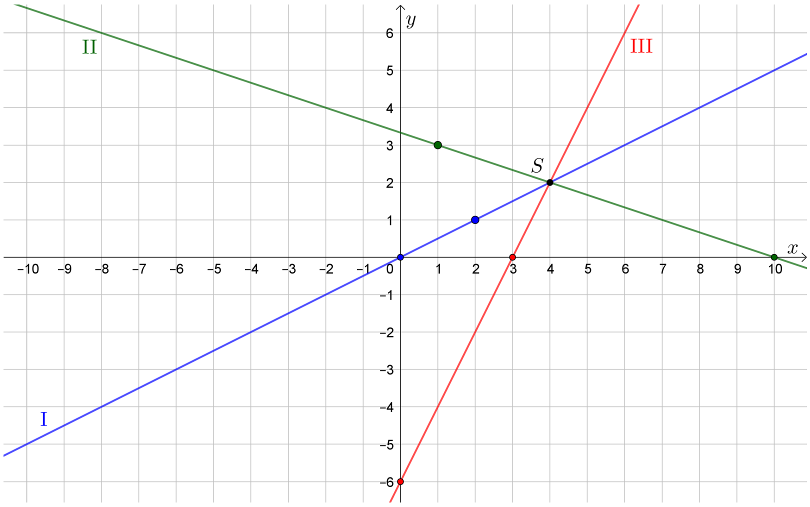
$$\begin{aligned} \mathrm{I}: \quad x - 2 \cdot y &= 0 \\ \mathrm{II}: \quad x + 3 \cdot y &= 10 \\ \mathrm{III}: 2 \cdot x + a \cdot y &= 6 \end{aligned}$$

1) Veranschauliche im Koordinatensystem unten jeweils die Lösungen der Gleichungen I und II.

Es gibt *genau eine* Zahl $a \in \mathbb{R}$, für die das lineare Gleichungssystem *genau eine* Lösung $(x \mid y) \in \mathbb{R}^2$ hat.

2) Berechne diese eindeutige Lösung sowie diese Zahl a.

3) Veranschauliche im Koordinatensystem rechts die Lösungen der Gleichung III für diese Zahl a und markiere die eindeutige Lösung des Gleichungssystems.



Lösung. Die linearen Gleichungen I und II haben *genau eine* gemeinsame Lösung.
Wir berechnen diese Lösung mit dem Einsetzungsverfahren:

$$\mathrm{I}: \ x = 2 \cdot y$$

$$\overset{\mathrm{II}}{\Longrightarrow} \ 2 \cdot y + 3 \cdot y = 10 \implies y = 2 \overset{\mathrm{I}}{\Longrightarrow} \ x = 4$$

Die Lösungsgerade I verläuft zum Beispiel durch die Gitterpunkte $(0 \mid 0)$, $(2 \mid 1)$ und $(4 \mid 2)$.
Die Lösungsgerade II verläuft zum Beispiel durch die Gitterpunkte $(1 \mid 3)$, $(10 \mid 0)$ und $(4 \mid 2)$.
Diese beiden Geraden schneiden einander in der gemeinsamen Lösung $S = (4 \mid 2)$.
Wir setzen die Koordinaten von S in III ein, um a zu berechnen:

$$2 \cdot 4 + a \cdot 2 = 6 \implies a = -1$$

Die Lösungsgerade I verläuft zum Beispiel durch die Gitterpunkte $(0 \mid -6)$, $(3 \mid 0)$ und $(4 \mid 2)$. $\square$

Aufgabe 3. Für die Ableitungsfunktion f' der Funktion f gilt:

$$f'(x) = e^x \cdot \left(3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 4\right)$$

1) Zerlege das Polynom $3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 4$ in Linearfaktoren.

2) Ermittle das Monotonieverhalten von f.

3) Ermittle das Krümmungsverhalten von f.

Lösung.

1) Wir berechnen die Nullstellen des Polynoms:

$$3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 4 = 0$$

Aus der Großen Lösungsformel folgt:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{6} = \frac{-4 \pm 8}{6} \implies x_1 = -2,\ x_2 = \frac{2}{3}$$

Damit können wir das Polynom in Linearfaktoren zerlegen:

$$3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 4 = 3 \cdot (x + 2) \cdot (x - \tfrac{2}{3})$$

2) Aus dem Vorzeichen von

$$f'(x) = \underbrace{e^x \cdot 3}_{>0} \cdot (x + 2) \cdot (x - \tfrac{2}{3})$$

ermitteln wir das Monotonieverhalten von f:

	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < \frac{2}{3}$	$x = \frac{2}{3}$	$x > \frac{2}{3}$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	Hochpunkt	$\searrow$	Tiefpunkt	$\nearrow$

3) Mithilfe der Produktregel ermitteln wir eine Gleichung von f'':

$$\begin{aligned} & f'(x) = e^x \cdot (3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 4) \\ \implies\ & f''(x) = e^x \cdot (3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 4) + e^x \cdot (6 \cdot x + 4) = \\ & = e^x \cdot (3 \cdot x^2 + 10 \cdot x) = e^x \cdot x \cdot (3 \cdot x + 10) \end{aligned}$$

Die Nullstellen von f'' sind also 0 und $-\frac{10}{3}$.

Aus dem Vorzeichen von f'' ermitteln wir das Krümmungsverhalten von f:

	$x < -\frac{10}{3}$	$x = -\frac{10}{3}$	$-\frac{10}{3} < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\circlearrowleft$	Wendepunkt	$\curvearrowright$	Wendepunkt	$\circlearrowleft$

$\square$

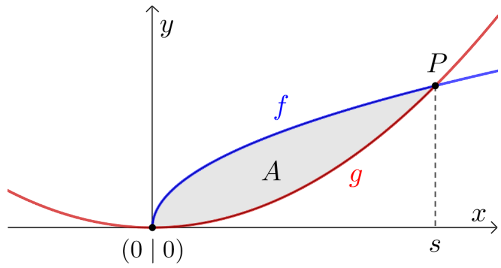
Aufgabe 4. Die Graphen der Funktionen f und g schließen die dargestellte Fläche mit Inhalt A ein.
Dabei gilt $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = c \cdot x^2$,
wobei $c \in \mathbb{R}$ eine bestimmte positive Zahl ist.

Für den Flächeninhalt gilt: $A = \frac{8}{3}$

1) Ermittle die positive Schnittstelle s in Abhängigkeit von c.

2) Berechne c.

3) Berechne die Koordinaten des Schnittpunkts P.



Lösung.

1) Wir berechnen die Schnittstellen von f und g:

$$f(x) = g(x) \iff \sqrt{x} = c \cdot x^2 \overset{c,x \geq 0}{\iff} x = c^2 \cdot x^4 \iff$$
$$\iff 0 = c^2 \cdot x^4 - x \iff 0 = x \cdot (c^2 \cdot x^3 - 1) \iff x = 0 \text{ oder } x = c^{-\frac{2}{3}}$$

Die positive Schnittstelle ist also $s = c^{-\frac{2}{3}}$.

2) Wir ermitteln den Flächeninhalt A in Abhängigkeit von c:

$$\int_0^{c^{-\frac{2}{3}}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{c^{-\frac{2}{3}}} x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{c^{-\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3} \cdot c^{-1} = \frac{2}{3 \cdot c}$$
$$\int_0^{c^{-\frac{2}{3}}} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{c^{-\frac{2}{3}}} c \cdot x^2\,\mathrm{d}x = c \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 \Big|_0^{c^{-\frac{2}{3}}} = c \cdot \frac{1}{3} \cdot c^{-2} = \frac{1}{3 \cdot c}$$
$$\implies A = \frac{2}{3 \cdot c} - \frac{1}{3 \cdot c} = \frac{1}{3 \cdot c}$$

Aus $A = \frac{8}{3}$ berechnen wir c:

$$\frac{8}{3} = \frac{1}{3 \cdot c} \iff 24 \cdot c = 3 \iff c = \frac{1}{8}$$

3) Aus $c = \frac{1}{8}$ folgt $s = 4$ und damit $f(s) = g(s) = 2$.
Der gesuchte Schnittpunkt ist also $P = (4 \mid 2)$.

$\square$

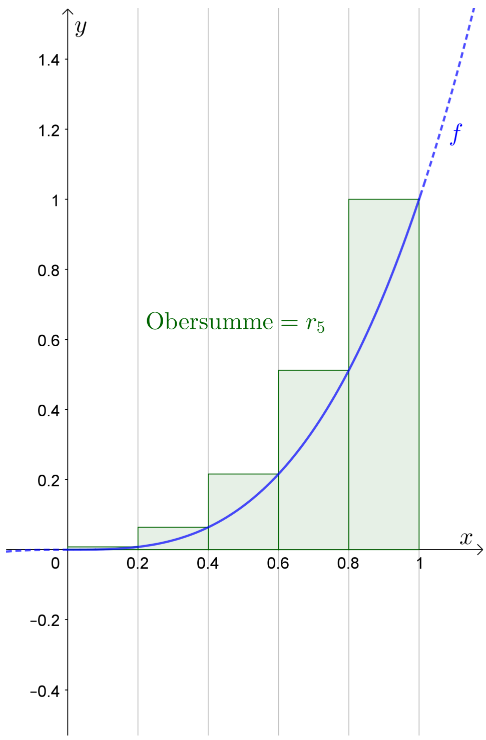
Aufgabe 5. Der Grenzwert der Folge (r_n) mit

$$r_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^3$$

soll berechnet werden.
Mit r_n kann das bestimmte Integral

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

einer gewissen stetigen Funktion f angenähert werden.
Dabei wird das Intervall $[0;1]$ in n gleich breite Teile zerlegt und mit r_n die zugehörige Obersumme berechnet.



1) Ermittle die Gleichung einer passenden Funktion f.
Fertige rechts eine Skizze an und veranschauliche r_5.

2) Berechne den Grenzwert $r = \lim\limits_{n\to\infty} r_n$.

Hinweis: Verwende den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

3) ☆ Sei $\varepsilon > 0$. Ermittle einen Index $n(\varepsilon)$ so, dass $|r_n - r| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n(\varepsilon)$ gilt. Begründe deine Antwort.

4) ☆ Ermittle den Grenzwert der Folge (a_n) und begründe deine Antwort:

$$a_n = \frac{1^{42} + 2^{42} + 3^{42} + \cdots + n^{42}}{n^{43}}$$

Lösung.

1) Jedes der n Teilintervalle hat die Breite $\frac{1}{n}$.
Wenn f eine monoton wachsende Funktion ist, dann haben die Rechtecke für die Obersumme die Höhen $f(\frac{k}{n})$ mit $k = 1, 2, \ldots, n$.
Eine passende Funktion f ist also $f(x) = x^3$.

2) Da f eine stetige Funktion ist, existiert der Grenzwert der Obersummen:

$$r = \lim_{n\to\infty} r_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} \cdot x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

3) Da f eine monotone Funktion ist, können wir die Differenz zwischen der Obersumme r_n und der Untersumme U_n mit n gleich breiten Rechtecken direkt ermitteln:

$$r_n - U_n = \frac{1}{n} \cdot [f(1) - f(0)] = \frac{1}{n}$$

Aus $U_n < r < r_n$ folgt

$$|r_n - r| < r_n - U_n = \frac{1}{n}$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ sorgen wir also dafür, dass $\frac{1}{n} < \varepsilon$ gilt. Dazu wählen wir $n(\varepsilon) = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$. Dann gilt für alle $n \geq n(\varepsilon)$:

$$|r_n - r| < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

4) Hinter a_n steckt ebenfalls eine Obersumme:

$$a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1^{42} + 2^{42} + 3^{42} + \cdots + n^{42}}{n^{42}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{42}$$

Den Grenzwert von (a_n) können wir also wie zuvor – nur mit $f(x) = x^{42}$ – berechnen:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 x^{42} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{43} \cdot x^{43} \Big|_0^1 = \frac{1}{43}$$

□