Name: ______________________________ Matrikelnummer: ____________________

1. Hinweise

– Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
– Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorhergegangenen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
– Arbeitszeit: 90 Minuten
– Jede der 5 Aufgaben ist 5 Punkte wert (ohne - Bonuspunkte).
– Die mit gekennzeichneten Unterpunkte sind jeweils 2 Bonuspunkte wert.
– Die besten 4 der 5 Aufgaben werden zur Beurteilung herangezogen.

2. Aufgaben

Aufgabe 1. Für welche Werte von $k \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung

$$x^2 + (2 \cdot k - 2) \cdot x + 1 - 6 \cdot k = 0$$

1) genau eine reelle Lösung? **2)** keine reelle Lösung? **3)** zwei reelle Lösungen?

Aufgabe 2. Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem in den Variablen x und y:

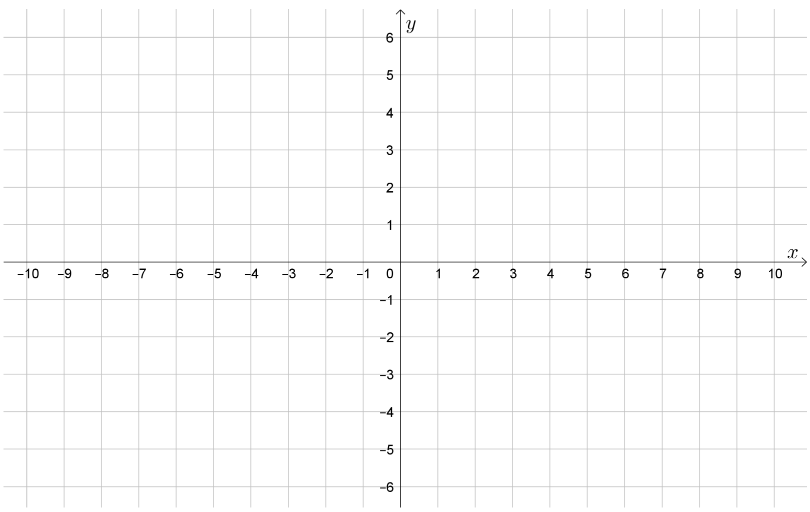
$$\begin{aligned} \mathrm{I}: \quad x - 2 \cdot y &= 0 \\ \mathrm{II}: \quad x + 3 \cdot y &= 10 \\ \mathrm{III}: 2 \cdot x + a \cdot y &= 6 \end{aligned}$$

1) Veranschauliche im Koordinatensystem unten jeweils die Lösungen der Gleichungen I und II.

Es gibt *genau eine* Zahl $a \in \mathbb{R}$, für die das lineare Gleichungssystem *genau eine* Lösung $(x \mid y) \in \mathbb{R}^2$ hat.

2) Berechne diese eindeutige Lösung sowie diese Zahl a.

3) Veranschauliche im Koordinatensystem rechts die Lösungen der Gleichung III für diese Zahl a und markiere die eindeutige Lösung des Gleichungssystems.



Aufgabe 3. Für die Ableitungsfunktion f' der Funktion f gilt:

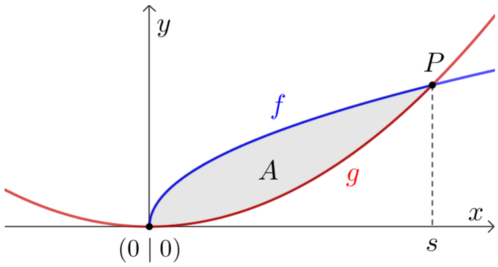
$$f'(x) = e^x \cdot \left(3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 4\right)$$

1) Zerlege das Polynom $3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 4$ in Linearfaktoren.

2) Ermittle das Monotonieverhalten von f.

3) Ermittle das Krümmungsverhalten von f.

Aufgabe 4. Die Graphen der Funktionen f und g schließen die dargestellte Fläche mit Inhalt A ein. Dabei gilt $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = c \cdot x^2$,
wobei $c \in \mathbb{R}$ eine bestimmte positive Zahl ist.



Für den Flächeninhalt gilt: $A = \frac{8}{3}$

1) Ermittle die positive Schnittstelle s in Abhängigkeit von c.

2) Berechne c.

3) Berechne die Koordinaten des Schnittpunkts P.

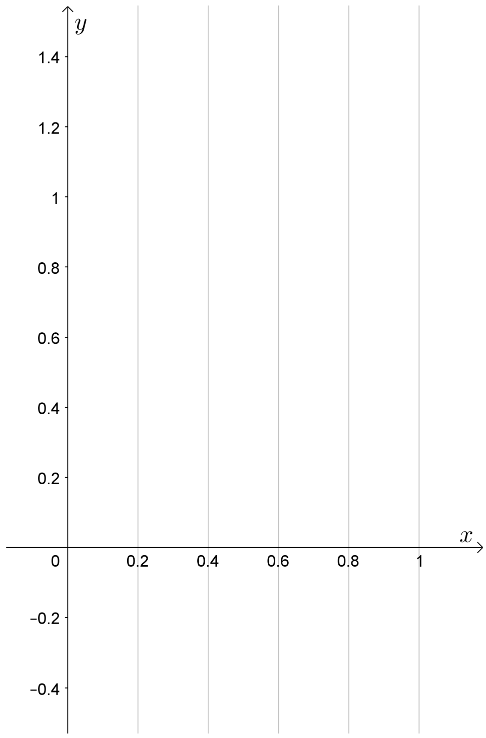
Aufgabe 5. Der Grenzwert der Folge (r_n) mit

$$r_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^3$$

soll berechnet werden.
Mit r_n kann das bestimmte Integral

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

einer gewissen stetigen Funktion f angenähert werden.
Dabei wird das Intervall $[0; 1]$ in n gleich breite Teile zerlegt und mit r_n die zugehörige Obersumme berechnet.



1) Ermittle die Gleichung einer passenden Funktion f.
Fertige rechts eine Skizze an und veranschauliche r_5.

2) Berechne den Grenzwert $r = \lim\limits_{n\to\infty} r_n$.

Hinweis: Verwende den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

3) ☆ Sei $\varepsilon > 0$. Ermittle einen Index $n(\varepsilon)$ so, dass $|r_n - r| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n(\varepsilon)$ gilt. Begründe deine Antwort.

4) ☆ Ermittle den Grenzwert der Folge (a_n) und begründe deine Antwort:

$$a_n = \frac{1^{42} + 2^{42} + 3^{42} + \cdots + n^{42}}{n^{43}}$$