Name: ____________________ Matrikelnummer: ________________

1. Hinweise

- Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
- Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorhergegangenen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
- Arbeitszeit: 90 Minuten
- Jede der 5 Aufgaben ist 5 Punkte wert (ohne ☆ - Bonuspunkte).
- Die mit ☆ gekennzeichneten Unterpunkte sind jeweils 2 Bonuspunkte wert.
- Die besten 4 der 5 Aufgaben werden zur Beurteilung herangezogen.

2. Aufgaben

Aufgabe 1. Zerlege das Polynom

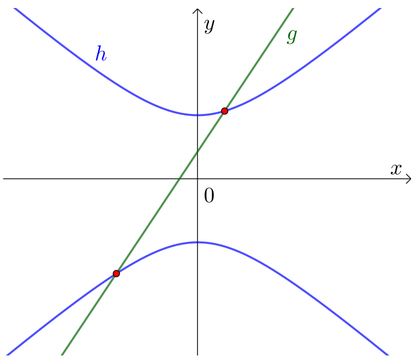
$$4 \cdot x^3 - 21 \cdot x + 10$$

in Linearfaktoren.

Aufgabe 2. Die Gerade g und die Hyperbel h mit

$$g\colon\ -3 \cdot x + 2 \cdot y = 4 \qquad\qquad h\colon\ -3 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 = 88$$

schneiden einander in 2 Punkten:



Berechne die Entfernung zwischen diesen beiden Schnittpunkten.

Aufgabe 3. Das Monotonieverhalten der Funktion f mit

$$f(x) = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot k \cdot x^2 + 42$$

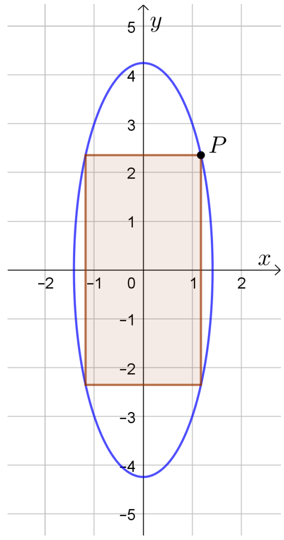
hängt vom Wert des Parameters $k \in \mathbb{R}$ ab.
Ermittle das Monotonieverhalten von f in Abhängigkeit von k.

Hinweis: Es gibt 3 Fälle zu unterscheiden.

Aufgabe 4. Die Lösungen der Gleichung $9 \cdot x^2 + y^2 = 18$ bilden die dargestellte Ellipse.

Dieser Ellipse werden Rechtecke eingeschrieben:

- Der Eckpunkt $P = (x_P \mid y_P)$ liegt auf der Ellipse im 1. Quadranten.
- Die Seiten des Rechtecks sind parallel zu den Koordinatenachsen.



Der Flächeninhalt F des Rechtecks hängt von x_P ab.

1) Zeige, dass

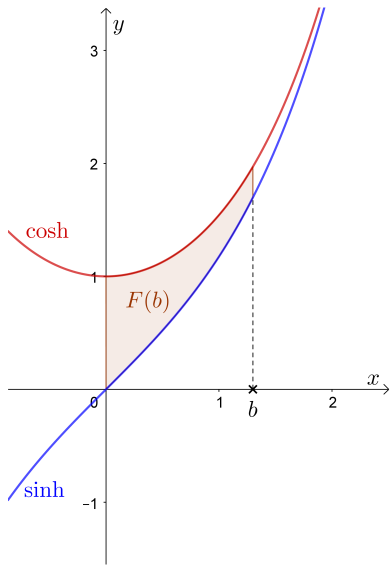
$$F(x_P) = 12 \cdot \sqrt{2 \cdot x_P^2 - x_P^4}$$

gilt.

2) Ermittle den größten Flächeninhalt, den ein solches Rechteck haben kann. Welche Koordinaten hat P in diesem Fall?

Aufgabe 5. Für die reellen Funktionen sinh (*Sinus hyperbolicus*) und cosh (*Cosinus hyperbolicus*) gilt:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



1) Begründe, warum $\cosh(x) > \sinh(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Die Graphen der beiden Funktionen schließen im Intervall $[0; b]$ die rechts dargestellte Fläche mit Inhalt $F(b)$ ein.

2) Stelle eine Formel für $F(b)$ mit $b > 0$ auf, und berechne den Grenzwert $\lim\limits_{b \to \infty} F(b)$.

3) Es gibt ein $a \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\sinh^2(x) + \cosh^2(x) = \cosh(a \cdot x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Berechne diesen Wert a.

Rotiert die dargestellte Fläche mit Inhalt $F(b)$ um die x-Achse, dann entsteht ein Rotationskörper mit Volumen $V(b)$.

4) ☆ Zeige, dass $\lim\limits_{b \to \infty} V(b) = \infty$ gilt.