Name: ______________________ Matrikelnummer: ______________

1. Hinweise

– Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
– Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorhergegangenen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
– Arbeitszeit: 90 Minuten
– Jede der 5 Aufgaben ist 5 Punkte wert (ohne - Bonuspunkte).
– Die mit gekennzeichneten Unterpunkte sind jeweils 2 Bonuspunkte wert.
– Die besten 4 der 5 Aufgaben werden zur Beurteilung herangezogen.

2. Aufgaben

Aufgabe 1. Für die Ableitungsfunktion f' der Funktion f gilt:

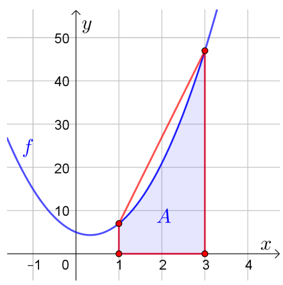
$$f'(x) = e^x \cdot (2 \cdot x^2 - 5 \cdot x - 3)$$

1) Zerlege das Polynom $2 \cdot x^2 - 5 \cdot x - 3$ in Linearfaktoren.
2) Ermittle das Monotonieverhalten von f.

Für die Funktion g gilt: $g(x) = e^x \cdot (a \cdot x^2 + b \cdot x + c)$ mit $a \neq 0$

3) Begründe, warum g' mindestens so viele reelle Nullstellen wie g hat.

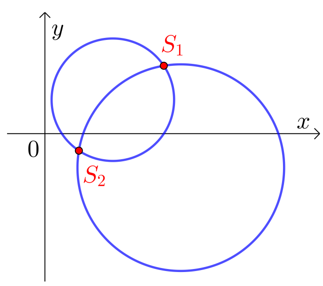
Aufgabe 2. Der Graph der Funktion f mit $f(x) = 6 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 5$ ist dargestellt.



Für den Inhalt der links markierten Fläche gilt: $A = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$

1) Berechne den Flächeninhalt A.
2) Diese Fläche wird durch das eingezeichnete Trapez angenähert. Berechne den Flächeninhalt T des Trapezes.
3) Um wie viel Prozent ist T größer als A?

Aufgabe 3. Die beiden dargestellten Kreise haben die folgenden Gleichungen:



$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-2)^2 = 13 \\ (x-8)^2 + (y+2)^2 = 37 \end{cases}$$

1) Berechne die Schnittpunkte S_1 und S_2.

Hinweis: Subtrahiere eine Gleichung von der anderen Gleichung.

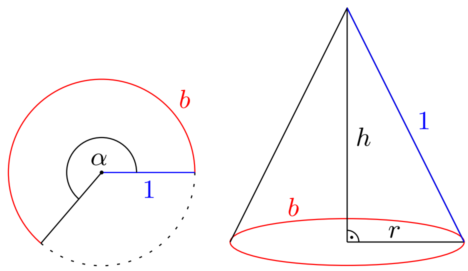
2) Berechne die Entfernung zwischen diesen beiden Schnittpunkten.

Aufgabe 4. Aus einem Kreissektor mit Radius 1 und Zentriwinkel α kann man – wie dargestellt – einen Drehkegel basteln.

Das Volumen V des Drehkegels hängt von α ab.
Für alle Winkel $\alpha \in \,]0; 2 \cdot \pi[$ gilt:

$$V(\alpha) = \frac{\alpha^2}{12 \cdot \pi} \cdot \sqrt{w(\alpha)} \quad \text{mit} \quad w(\alpha) = 1 - \frac{\alpha^2}{4 \cdot \pi^2}$$

Der Winkel α ist dabei im Bogenmaß.



1) Ermittle $V'(\alpha)$ mit den Ableitungsregeln.

Es gibt genau einen Winkel $\alpha^* \in \,]0; 2 \cdot \pi[$, für den das Volumen des Drehkegels maximal ist.

Dieser Winkel ist eine Lösung der folgenden Gleichung: $\sqrt{w(\alpha)} = \dfrac{\alpha^2}{8 \cdot \pi^2 \cdot \sqrt{w(\alpha)}}$

2) Berechne diesen Winkel α^* im Bogenmaß.

3) Es gilt: $\alpha^* = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}}$

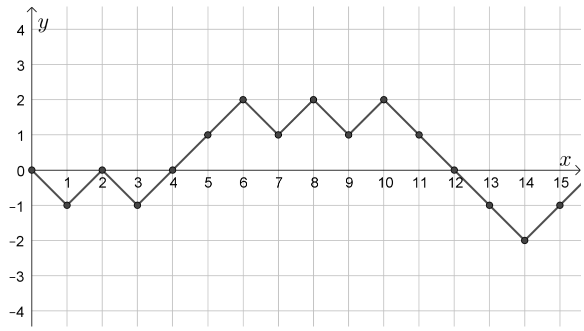
Trage richtige Zahlen in die Kästchen ein.

Aufgabe 5. Bei einem *Random Walk* bewegt man sich ausgehend vom Punkt $(0 \mid 0)$.
Dazu wird immer wieder eine faire Münze geworfen.
Nach jedem Münzwurf bewegt man sich weiter:

i) Beim Ergebnis „Kopf“ bewegt man sich entlang des Vektors $\binom{1}{1}$ weiter.

ii) Beim Ergebnis „Zahl“ bewegt man sich entlang des Vektors $\binom{1}{-1}$ weiter.

Der rechts dargestellte Random Walk verläuft durch die Punkte $(6 \mid 2)$ und $(12 \mid 0)$.



1) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Random Walk durch den Punkt $(6 \mid 2)$ verläuft.

2) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Random Walk durch den Punkt $(12 \mid 0)$ verläuft.

3) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Random Walk durch den Punkt $(12 \mid 0)$ verläuft, wenn du schon weißt, dass dieser Random Walk durch den Punkt $(6 \mid 2)$ verläuft.

4) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_n, dass ein Random Walk durch den Punkt $(2 \cdot n \mid 0)$ verläuft? Stelle mithilfe von $n \in \mathbb{N}$ eine Formel für p_n auf.