

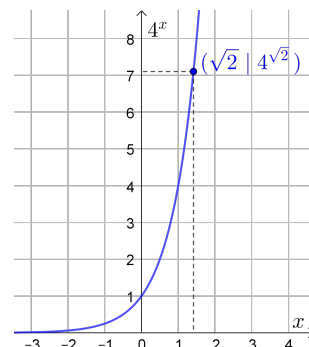
Am [Arbeitsblatt – Potenzen und Wurzeln](#) haben wir Potenzen  $a^x$  für alle  $a > 0$  und  $x \in \mathbb{Q}$  definiert:

- 1) Wenn  $x$  eine natürliche Zahl ist, dann gilt zum Beispiel:  $a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$  und  $a^0 = 1$
- 2) Wenn  $x$  eine negative Zahl ist, dann gilt zum Beispiel:  $a^{-5} = \frac{1}{a^5}$  und  $a^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{5}{3}}}$
- 3) Wenn  $x$  eine **rationale** Zahl ist, dann gilt zum Beispiel:  $a^{2,3} = a^{\frac{23}{10}} = \sqrt[10]{a^{23}}$
- 4) Berechne mit dem Taschenrechner:  $4^{\sqrt{2}} = 4^{1,414213\dots} = 7,102\,993\dots$

Die Zahlen  $4^1, 4^{1,4}, 4^{1,41}, 4^{1,414}, 4^{1,4142}, 4^{1,41421}, 4^{1,414213}, \dots$  werden **monoton** größer. Sie werden aber *nicht* unbeschränkt groß, weil jede dieser Zahlen kleiner als  $4^2 = 16$  ist. Sie nähern sich dem sogenannten **Grenzwert**  $4^{\sqrt{2}}$  *beliebig genau* an.

Damit ist die Potenz  $4^x$  auch für jede **irrationale** Zahl  $x$  definiert.

Rechts siehst du den Graphen der Funktion  $f$  mit  $f(x) = 4^x$ .



So sind die Potenzen  $a^x$  für alle  $a > 0$  und alle  $x \in \mathbb{R}$  definiert, und es gelten die **Rechenregeln für Potenzen**:

i)  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$     ii)  $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$     iii)  $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$     iv)  $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$     v)  $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Für alle  $a > 0$  und alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $a^x > 0$ , zum Beispiel:  $4^0 = 1$  bzw.  $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

Jede Funktion  $f$  mit

$$f(x) = c \cdot a^x \quad \text{mit } a > 0, a \neq 1, c \neq 0$$

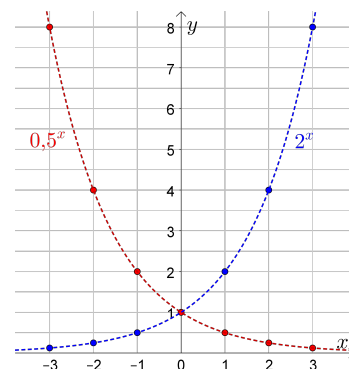
heißt **Exponentialfunktion** mit **Basis**  $a$ .

Die unabhängige Variable  $x$  ist ...

- ... bei **Exponentialfunktionen**  $f(x) = c \cdot a^x$  der **Exponent**.
- ... bei **Potenzfunktionen**  $g(x) = c \cdot x^m$  die **Basis**.

Unten ist eine Wertetabelle von  $f(x) = 2^x$  und  $g(x) = 0,5^x$  angegeben. Skizziere rechts die beiden Funktionsgraphen.

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8
$g(x)$	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125



Für jede Basis  $a$  mit  $a > 1$  gilt:

Je größer der Exponent  $x$ , desto **größer** ist die Potenz  $a^x$ .

Für jede Basis  $a$  mit  $0 < a < 1$  gilt:

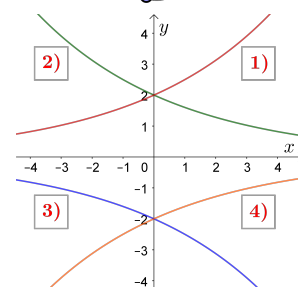
Je größer der Exponent  $x$ , desto **kleiner** ist die Potenz  $a^x$ .


Die Graphen der vier Exponentialfunktionen

- 1)  $f_1(x) = 2 \cdot 1,25^x$
- 2)  $f_2(x) = 2 \cdot 0,8^x$
- 3)  $f_3(x) = -2 \cdot 1,25^x$
- 4)  $f_4(x) = -2 \cdot 0,8^x$

sind rechts dargestellt. Beschrifte die Funktionsgraphen.

Allgemein verläuft der Graph von  $f(x) = c \cdot a^x$  durch den Punkt  $(0 | c)$ .



Prozentrechnung 

Erinnere dich, dass wir jede Multiplikation mit einer positiven Zahl als Prozentrechnung deuten können:

i)  $c \cdot 1,42 = c \cdot 142\%$  mit  $c > 0$

ii)  $c \cdot 0,42 = c \cdot 42\%$  mit  $c > 0$

$c$  auf **142%** seines Werts vergrößern

$c$  auf **42%** seines Werts verkleinern

$c$  um **42%** seines Werts vergrößern

$c$  um **58%** seines Werts verkleinern

Interpretation des Werts der Basis  $a$  

Für jede Exponentialfunktion  $f$  mit  $f(x) = c \cdot a^x$  gilt:

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{c \cdot a^{x+1}}{c \cdot a^x} = \frac{a^x \cdot a^1}{a^x} = a \implies f(x+1) = f(x) \cdot a$$

Für jede lineare Funktion  $\ell$  mit  $\ell(x) = k \cdot x + d$  gilt hingegen:  $\ell(x+1) = \ell(x) + k$

a) Für die Exponentialfunktion  $g$  gilt:  $g(x) = c \cdot 1,3^x$

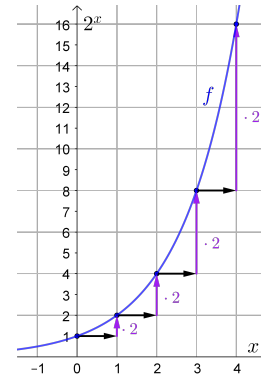
Trage die richtigen Zahlen in die Kästchen ein.

1)  $g(1)$  ist um **30%** größer als  $g(0)$ .  $\frac{g(1)}{g(0)} = \frac{c \cdot 1,3}{c \cdot 1} = 1,3$

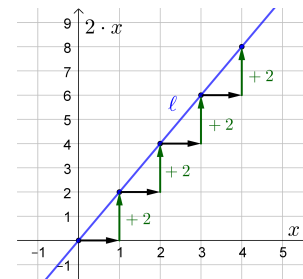
2)  $g(2)$  ist um **69%** größer als  $g(0)$ .  $\frac{g(2)}{g(0)} = 1,3^2 = 1,69$

3)  $g(3)$  ist um **119,7%** größer als  $g(0)$ .  $\frac{g(3)}{g(0)} = 1,3^3 = 2,197$

Exponentialfunktion:  $f(x) = 2^x$



Lineare Funktion:  $\ell(x) = 2 \cdot x$




b) Für die Exponentialfunktion  $h$  gilt:  $h(x) = c \cdot 0,9^x$

Trage die richtigen Zahlen in die Kästchen ein.

1)  $h(1)$  ist um **10%** kleiner als  $h(0)$ .  $\frac{h(1)}{h(0)} = \frac{c \cdot 0,9}{c \cdot 1} = 0,9$

2)  $h(2)$  ist um **19%** kleiner als  $h(0)$ .  $\frac{h(2)}{h(0)} = 0,9^2 = 0,81$

3)  $h(3)$  ist um **27,1%** kleiner als  $h(0)$ .  $\frac{h(3)}{h(0)} = 0,9^3 = 0,729$

Exponentielles Wachstum 

Der Wert eines Sparbuchs mit 300 € Kapital wächst pro Jahr **effektiv** um 2,8%.

1) Welchen Wert hat das Sparbuch nach einem Jahr?

$$300 \cdot 102,8\% = 300 \cdot 1,028 = 308,40 \text{ €}$$

2) Welchen Wert hat das Sparbuch nach 5 Jahren?

$$300 \cdot 1,028^5 = 344,41... \text{ €}$$

3)  $K(n)$  ist der Wert des Sparbuchs in € nach  $n$  Jahren.  
Stelle eine Gleichung der Exponentialfunktion  $K$  auf.

$$K(n) = 300 \cdot 1,028^n$$

4) Nach wie vielen Jahren hat sich der Wert des Sparbuchs erstmals verdoppelt?

Diese Zeitdauer heißt auch **Verdopplungszeit**. Nähere die Verdopplungszeit dieser Exponentialfunktion durch Probieren mit dem Taschenrechner auf ein Jahr genau an.

Mehr zur Berechnung der Verdopplungszeit findest du am [Arbeitsblatt – Logarithmusfunktionen](#).

$$K(25) = 598,34... \text{ €} < 600 \text{ €} \quad K(26) = 615,09... \text{ €} > 600 \text{ €}$$

Nach 26 Jahren hat sich der Wert des Sparbuchs erstmals verdoppelt.

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  sind 250 Bakterien in einer Petrischale.  
 Die Bakterienanzahl in der Petrischale wächst exponentiell.  
 Für die Bakterienanzahl nach  $t$  Stunden gilt also:  $B(t) = c \cdot a^t$   
 Die Bakterienanzahl hat sich nach 4 Stunden um 28% vergrößert.

- 1) Berechne  $a$  und  $c$ . Für die Berechnung von  $a$  gibt es mehrere Lösungswege.
- 2) Um wieviel Prozent wächst die Bakterienanzahl pro Stunde? Müssen es genau 7% oder mehr/weniger sein?

$$B(0) = 250 \implies c \cdot a^0 = 250 \implies c = 250$$

Lösungsweg 1 (Einsetzen in Funktionsgleichung):

$$B(4) = 1,28 \cdot B(0) \implies c \cdot a^4 = 1,28 \cdot c \implies a^4 = 1,28 \implies a = \sqrt[4]{1,28} = 1,0636\dots$$

Lösungsweg 2 (Interpretation der Basis  $a$ ):  $a^4 = 1,28 \implies a = \sqrt[4]{1,28} = 1,0636\dots$

Lösungsweg 3 (Rechenregeln für Potenzen): Pro 4 Stunden wird mit dem Faktor 1,28 multipliziert.

$$B(t) = 250 \cdot 1,28^{\frac{t}{4}} = 250 \cdot \left(1,28^{\frac{1}{4}}\right)^t = 250 \cdot 1,0636\dots^t$$

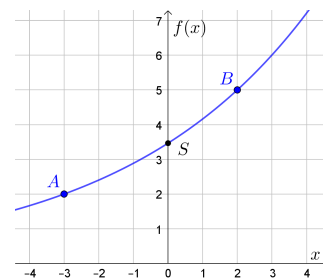
Pro Stunde wächst die Bakterienanzahl also um 6,36...%.

Der Graph der Funktion  $f$  mit  $f(x) = c \cdot a^x$  verläuft durch die Punkte  $A = (-3 | 2)$  und  $B = (2 | 5)$ .

- 1) Berechne  $a$  und  $c$ .
- 2) Welche Koordinaten hat der Schnittpunkt  $S$  mit der vertikalen Achse?

$$\text{I: } 2 = c \cdot a^{-3} \implies c = \frac{2}{a^{-3}} = 2 \cdot a^3$$

$$\text{II: } 5 = c \cdot a^2$$



Lösungsweg 1 (Gleichungssystem mit Einsetzungsverfahren lösen):

$$\text{II} \implies 5 = 2 \cdot a^3 \cdot a^2 \implies \frac{5}{2} = a^5 \implies a = \sqrt[5]{\frac{5}{2}} = 1,201\dots$$

Lösungsweg 2 (Interpretation der Basis  $a$ ):  $2 \cdot a^5 = 5 \implies a = \sqrt[5]{\frac{5}{2}} = 1,201\dots$

Lösungsweg 3 (Rechenregeln für Potenzen):  $2 \cdot \frac{5}{2} = 5$

Pro 5 Schritte nach rechts wird also mit dem Faktor  $\frac{5}{2}$  multipliziert.  $\implies f(x) = c \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x}{5}} = c \cdot 1,201\dots^x$

$$\implies c = 2 \cdot (1,201\dots)^3 = 3,465\dots$$

$$f(0) = c \cdot a^0 = c = 3,465\dots \implies S = (0 | 3,465\dots)$$

Welches Ergebnis zeigt dein Taschenrechner jeweils an?

$$0,5^{10} = 0,000976\dots \quad 0,5^{100} = 7,88\dots \cdot 10^{-31} \quad 0,5^{1000} = 0$$

Begründe, warum  $0,5^{1000}$  nicht 0 sein kann.

Es muss  $0,5^{1000} = 0,5 \cdot 0,5 \cdot \dots \cdot 0,5$  als Produkt positiver Zahlen wieder positiv sein.

Für den Taschenrechner sind aber alle Zahlen zwischen 0 und  $10^{-100}$  gleich 0.

Grenzwert & Asymptotisches Verhalten



MmF

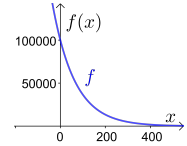
Ist  $0 < a < 1$ , dann werden die Zahlen  $a^1, a^2, a^3, a^4, \dots$  immer kleiner und kommen der Zahl 0 beliebig nahe. Wir schreiben kurz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0 \quad \text{bzw.} \quad a^n \rightarrow 0$$

und sprechen: „Der Grenzwert (Limes) von  $a^n$  für  $n$  gegen unendlich ist 0.“

lim wie limit im Englischen.

Die Funktion  $f$  mit  $f(x) = 100\,000 \cdot 0,99^x$  hat die folgenden Eigenschaften:



- i)  $f$  ist streng monoton fallend.
- ii) Es gilt  $f(x) > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .
- iii) Die Funktionswerte kommen für größer werdendes  $x$  der Zahl 0 beliebig nahe:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

Mehr dazu findest du am [Arbeitsblatt – Grenzwert von Folgen I](#) und am [Arbeitsblatt – Beschränktes Wachstum](#).

Zinseszinsen



MmF

In Utopia bietet dir eine Bank verschiedene Sparmöglichkeiten an: Für welche würdest du dich entscheiden?

- 1) Ein Sparbuch, dessen Wert 1 Mal pro Jahr effektiv auf  $100\% + \frac{100\%}{1} = 200\%$  seines Werts wächst.
- 2) Ein Sparbuch, dessen Wert 2 Mal pro Jahr effektiv auf  $100\% + \frac{100\%}{2} = 150\%$  seines Werts wächst.
- 3) Ein Sparbuch, dessen Wert 12 Mal pro Jahr effektiv auf  $100\% + \frac{100\%}{12} = 108,33\dots\%$  seines Werts wächst.
- 4) Ein Sparbuch, dessen Wert 365 Mal pro Jahr effektiv auf  $100\% + \frac{100\%}{365} = 100,2739\dots\%$  seines Werts wächst.

Auf wieviel Prozent seines Werts wächst das Kapital auf den Sparbüchern **2), 3), 4)** effektiv pro Jahr?

- 2)  $K \cdot 1,5 \cdot 1,5 = K \cdot 2,25$   
Das Kapital wächst pro Jahr effektiv auf **225 %** seines Werts.
- 3)  $K \cdot 1,0833\dots^{12} = K \cdot 2,613\dots$   
Das Kapital wächst pro Jahr effektiv auf **261,3... %** seines Werts.
- 4)  $K \cdot 1,0002739\dots^{365} = K \cdot 2,714\dots$   
Das Kapital wächst pro Jahr effektiv auf **271,4... %** seines Werts.

Was könnte passieren, wenn man nach dem gleichen Prinzip jede Stunde, jede Minute, jede Sekunde, jede Millisekunde, ... verzinst?

Eulersche Zahl



MmF

Der Wert eines Sparbuchs wächst  $n$  Mal pro Jahr effektiv auf  $100\% + \frac{100\%}{n}$  seines Werts.

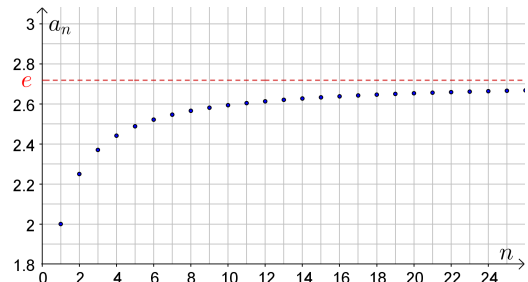
Pro Jahr wird der Wert des Sparbuchs effektiv mit  $a_n = (100\% + \frac{100\%}{n})^n = (1 + \frac{1}{n})^n$  multipliziert.

Die Zahlen  $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  wachsen, wenn  $n$  größer wird, bleiben aber unter 3:

$$\underbrace{a_1}_{=2} < \underbrace{a_2}_{=2,25} < \underbrace{a_3}_{=2,37\dots} < \underbrace{a_4}_{=2,44\dots} < \dots < \underbrace{a_{365}}_{=2,7145\dots} < \dots < 3$$

Diese Zahlen streben auf die **Eulersche Zahl  $e$**  zu:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e = \mathbf{2,718281\dots}$$



Die Eulersche Zahl  $e$  ist – so wie  $\sqrt{2}$  und die Kreiszahl  $\pi$  – irrational.

Findest du auf deinem Taschenrechner eine Möglichkeit, um die ersten Nachkommastellen von  $e$  anzuzeigen?

Der Graph der Exponentialfunktion mit  $\lambda \mapsto e^\lambda$  ist rechts dargestellt.  
 Sie ist streng monoton steigend, weil die Basis  $e = 2,71\dots$  größer als 1 ist.  
 Es werden **Exponentialfunktionen** anstelle von

$$f(x) = c \cdot a^x \quad \text{mit } a > 0, a \neq 1, c \neq 0$$

auch folgendermaßen angegeben:

$$g(x) = c \cdot e^{\lambda \cdot x} \quad \text{bzw.} \quad h(x) = c \cdot e^{-\lambda \cdot x} \quad \text{mit } \lambda > 0, c \neq 0$$

Die Funktion  $g$  mit

$$g(x) = c \cdot e^{\lambda \cdot x} = c \cdot (e^\lambda)^x$$

ist für jedes  $\lambda > 0$  eine Exponentialfunktion mit Basis  $e^\lambda > 1$ .

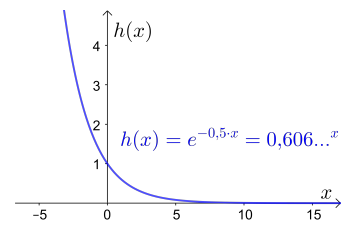
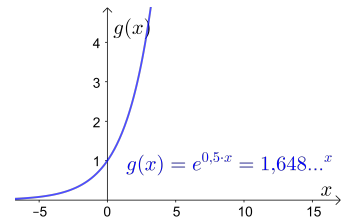
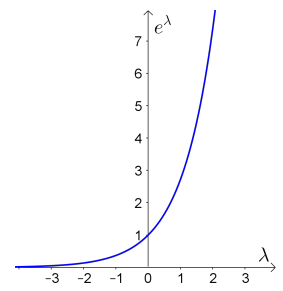
Sie ist also streng monoton steigend.

Die Funktion  $h$  mit

$$h(x) = c \cdot e^{-\lambda \cdot x} = c \cdot (e^{-\lambda})^x$$

ist für jedes  $\lambda > 0$  eine Exponentialfunktion mit Basis  $e^{-\lambda} = \frac{1}{e^\lambda} < 1$ .

Sie ist also streng monoton fallend.



Das im Jahr 1986 in Tschernobyl freigesetzte Cäsium-137 zerfällt annähernd nach folgendem Gesetz:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-0,023\,043 \cdot t}$$

$t \dots$  Zeit in Jahren ( $t = 0$  ist das Jahr 1986.)

$N(t) \dots$  vorhandene Menge Cäsium-137 zum Zeitpunkt  $t$

$N_0 \dots$  freigesetzte Menge Cäsium-137 im Jahr 1986, denn:  $N(0) = N_0 \cdot e^0 = N_0$

- 1) Wieviel Prozent der freigesetzten Menge Cäsium-137 waren im Jahr 2023 noch vorhanden?
- 2) Wandle die Gleichung in die Form  $N(t) = N_0 \cdot a^t$  um. Interpretiere den Wert von  $a$ .
- 3) Wie viele Jahre dauert es, bis sich die vorhandene Menge Cäsium-137 halbiert?  
 Diese Zeitdauer heißt auch **Halbwertszeit**. Nähere die Halbwertszeit von Cäsium-137 durch Probieren mit dem Taschenrechner auf ein Jahr genau an.

Mehr zur *Berechnung* dieser Halbwertszeit findest du am [Arbeitsblatt – Logarithmusfunktionen](#).

- 1)  $2023 - 1986 = 37 \implies N(37) = N_0 \cdot 0,4263\dots$   
 Im Jahr 2023 waren also noch 42,63... % der freigesetzten Menge vorhanden.
- 2)  $N(t) = N_0 \cdot (e^{-0,023\,043})^t = N_0 \cdot 0,9772\dots^t$   
 Pro Jahr wird die vorhandene Menge also *auf*  $a = 97,72\dots$  % bzw.  
 um  $1 - a = 2,27\dots$  % verkleinert.
- 3)  $N(30) = N_0 \cdot 50,09\dots$  %  $> N_0 \cdot 50$  %      $N(31) = N_0 \cdot 48,95\dots$  %  $< N_0 \cdot 50$  %  
 Die Halbwertszeit von Cäsium-137 beträgt also rund 30 Jahre.

