

Wir sehen uns die Steigung einer differenzierbaren Funktion  $f$  im Intervall  $[a; b]$  an.

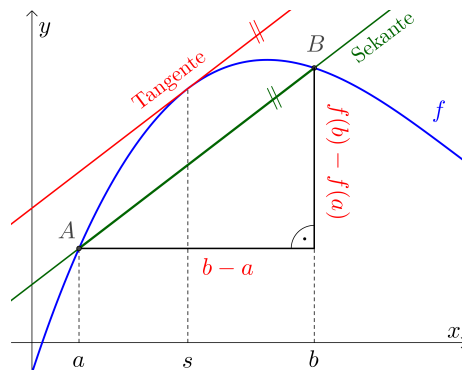
Stelle mithilfe von  $f$ ,  $a$  und  $b$  eine Formel für die Steigung der Gerade durch die Punkte  $A = (a | f(a))$  und  $B = (b | f(b))$  auf:

$$\text{Steigung der Sekante} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Der **Mittelwertsatz der Differentialrechnung** garantiert (mindestens) eine Stelle  $s$  im Intervall  $[a; b]$  so, dass gilt:

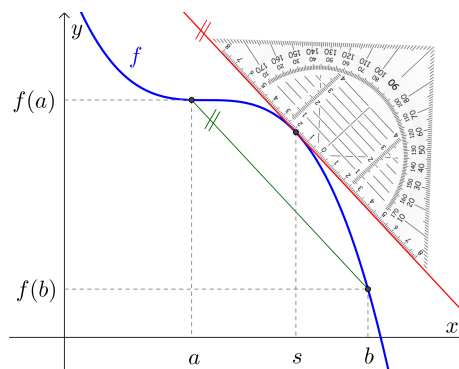
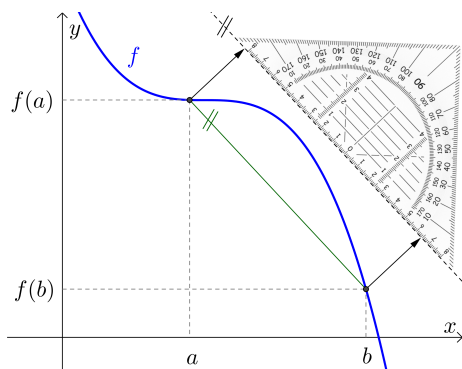
$$f'(s) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$


Steigung einer Tangente  Steigung der Sekante



Die **mittlere Änderungsrate** von  $f$  in  $[a; b]$  ist also gleich groß wie die **lokale Änderungsrate** von  $f$  an einer Stelle  $s$  in  $[a; b]$ .

Wir können eine solche Stelle  $s$  auch grafisch ermitteln, indem wir die Sekante parallel verschieben:



**Kubische Funktion** 

Der Graph der kubischen Funktion  $f$  mit  $f(x) = -\frac{7}{225} \cdot x^3 + \frac{77}{450} \cdot x^2 + \frac{101}{90} \cdot x + 3$  ist dargestellt.

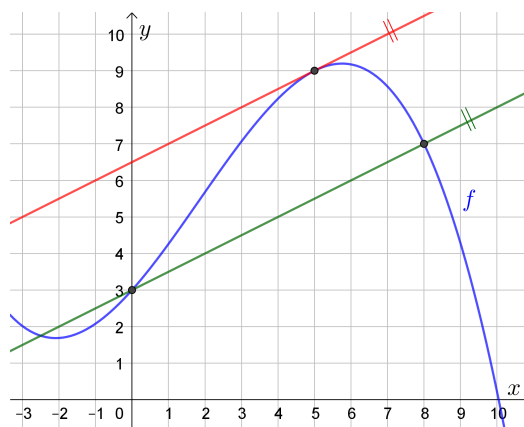
- 1) Zeichne rechts die Sekante durch die Punkte  $A = (0 | f(0))$  und  $B = (8 | f(8))$  ein.
- 2) Berechne jene Stelle  $s$  im Intervall  $[0; 8]$ , an der die Tangente die gleiche Steigung wie die Sekante hat. Zeichne rechts diese Tangente ein.

Steigung der Sekante:

$$\frac{f(8) - f(0)}{8 - 0} = \frac{7 - 3}{8} = 0,5$$

$$f'(x) = -\frac{7}{75} \cdot x^2 + \frac{77}{225} \cdot x + \frac{101}{90}$$

$$f'(x) = 0,5 \iff -\frac{7}{75} \cdot x^2 + \frac{77}{225} \cdot x + \frac{56}{90} = 0 \iff x = -\frac{4}{3} \text{ oder } x = 5$$



Die Tangente an der Stelle  $s = 5$  hat die gleiche Steigung 0,5 wie die Sekante.



Der Graph einer Weg-Zeit-Funktion  $s$  ist im Zeitintervall  $[0; 6]$  dargestellt.

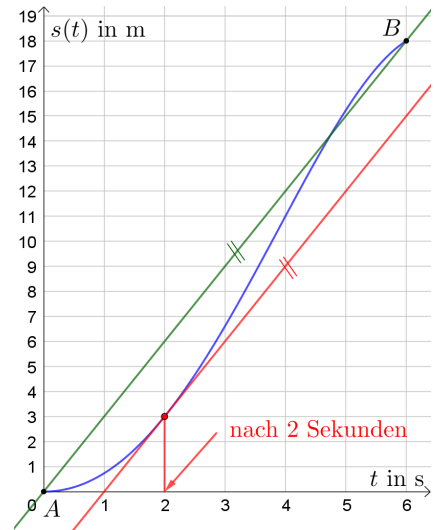
Zeichne rechts die Sekante durch die Punkte  $A$  und  $B$  ein.  
Ermittle ihre Steigung und interpretiere den Wert der Steigung.

$$\text{Steigung der Sekante} = \frac{18 \text{ m}}{6 \text{ s}} = 3 \text{ m/s}$$

Die mittlere Geschwindigkeit im Zeitraum  $[0; 6]$  beträgt  $3 \text{ m/s}$ .

Der Mittelwertsatz garantiert mindestens einen Zeitpunkt, an dem die Momentangeschwindigkeit gleich groß ist wie die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall  $[0; 6]$ .

Zu welchem Zeitpunkt passiert das rechts oben zum ersten Mal? Zeichne eine zugehörige Tangente ein.

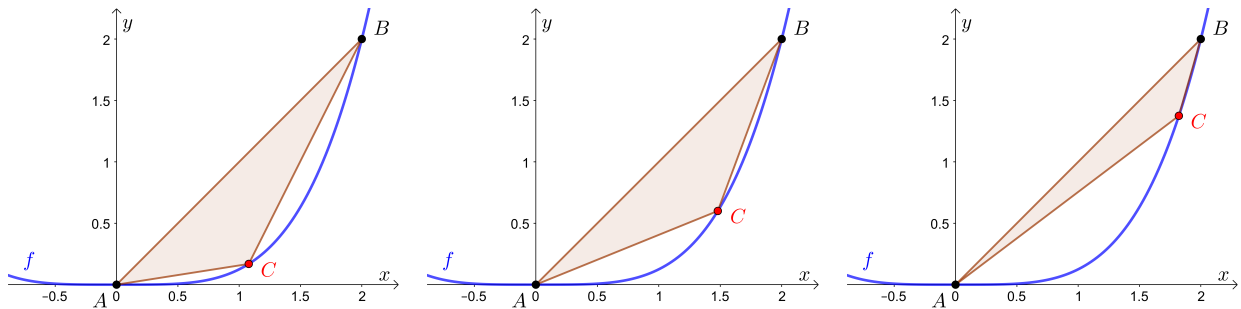


Optimierungsaufgabe



Am Graphen der Funktion  $f(x) = \frac{1}{8} \cdot x^4$  fixieren wir die Punkte  $A = (0 | 0)$  und  $B = (2 | 2)$ .

Der Punkt  $C$  ist am Graphen dazwischen beweglich. Wir zeichnen das Dreieck  $ABC$  ein:



Der Flächeninhalt des Dreiecks soll so groß wie möglich werden.

- 1) Berechne die Länge  $c$  der Seite  $AB$ .

$$c = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2,828\dots$$

- 2) Der Flächeninhalt  $\frac{c \cdot h}{2}$  soll so groß wie möglich werden.

Ermittle rechts grafisch jenen Punkt  $C$ , für den die Höhe  $h$  so groß wie möglich ist. Zeichne das optimale Dreieck ein.

- 3) Berechne die Koordinaten von  $C$ .

$$\text{Steigung der Sekante} = \frac{2 - 0}{2 - 0} = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^3 = 1 \iff x^3 = 2 \iff x = \sqrt[3]{2} = 1,25\dots \quad C = (1,25\dots | 0,314\dots) = f(\sqrt[3]{2})$$

