

Potenzen mit natürlichen Exponenten



Wir verwenden die Potenzschreibweise, um uns Schreibarbeit zu ersparen:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

Die Schreibweise a^9 ist praktischer als $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$.

Sprechweise: „a hoch n“ oder die „n-te Potenz von a“

Die Zahl a heißt **Basis** und die natürliche Zahl $n \geq 1$ heißt **Exponent** der **Potenz a^n** .

Potenzen mit natürlichen Exponenten



Berechne ohne Taschenrechner.

a) $2^3 = 8$ b) $3^2 = 9$ c) $5^1 = 5$ d) $1^5 = 1$ e) $0^2 = 0$ f) $(-1)^3 = -1$

Rechenregeln für Potenzen



Die folgenden Rechenregeln für Potenzen gelten für alle natürlichen Exponenten n und m .

Überprüfe diese Rechenregeln im Fall $n = 3$ bzw. $m = 2$ mit den Rechenregeln für **Brüche** und **Terme**.

i) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

ii) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$a^3 \cdot a^2 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a^{3+2} \checkmark$

$(a \cdot b)^3 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = a^3 \cdot b^3 \checkmark$

iii) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ mit $b \neq 0$

iv) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a^3}{b^3} \checkmark$

$(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^{3 \cdot 2} \checkmark$

Keine Rechenregeln für Potenzen



Berechne $(4 + 3)^2 = 49$ und $4^2 + 3^2 = 25$. Im Allgemeinen gilt: $(a + b)^n \neq a^n + b^n$

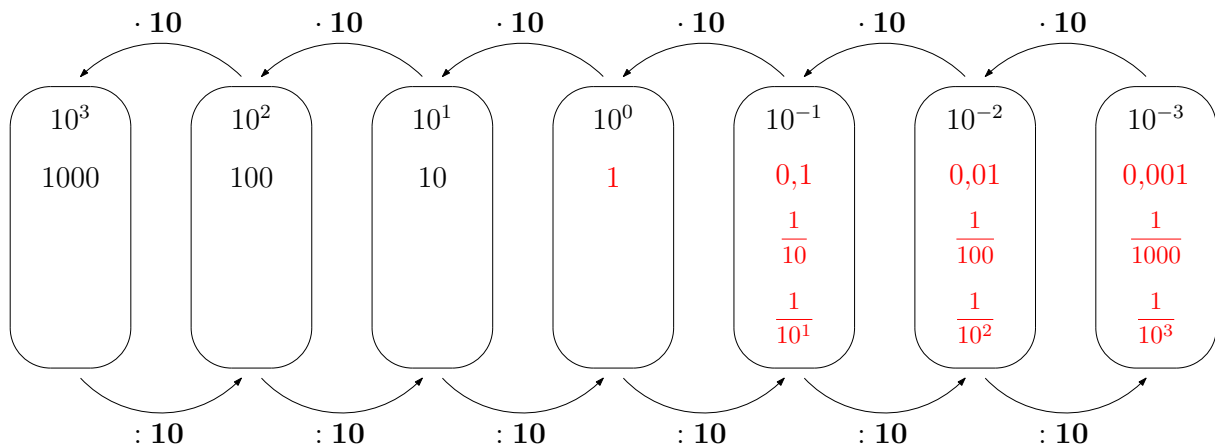
Berechne $(4 - 3)^2 = 1$ und $4^2 - 3^2 = 7$. Im Allgemeinen gilt: $(a - b)^n \neq a^n - b^n$

Mehr zum Ausmultiplizieren von $(a + b)^n$ und $(a - b)^n$ findest du am [Arbeitsblatt – Binomische Formeln und Pascalsches Dreieck](#).

Zehnerpotenzen mit ganzzahligen Exponenten




Welche Zahlen sind $10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \dots$? Trage die richtigen Zahlen in die Kästchen ein.




Wir definieren also: $10^0 = 1$ bzw. $10^{-n} = \frac{1}{10^n}$

Damit gelten alle Rechenregeln für Zehnerpotenzen auch mit **ganzzahligen** Exponenten.

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten 

Allgemein definieren wir Potenzen mit Basis $a \neq 0$ und ganzzahligen Exponenten folgendermaßen:

$$a^0 = 1 \quad a^{-1} = \frac{1}{a^1} \quad a^{-2} = \frac{1}{a^2} \quad a^{-3} = \frac{1}{a^3} \quad \dots \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$


Rechenregel für Potenzen 

Die folgende Rechenregel gilt für alle ganzzahligen Exponenten n und m : $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ mit $a \neq 0$

Überprüfe diese Rechenregel in den folgenden Fällen mit den Rechenregeln für Brüche und Terme.

i) $\frac{a^5}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a^3 \checkmark \quad (5-2=3)$ iii) $\frac{a^3}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = 1 = a^0 \checkmark \quad (3-3=0)$


ii) $\frac{a^2}{a^5} = \frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^3} = a^{-3} \checkmark \quad (2-5=-3)$ iv) $\frac{a^{-2}}{a^{-3}} = \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a^3}} = \frac{a^3}{a^2} = a^1 \checkmark \quad (-2-(-3)=1)$

Rechnen mit Potenzen 

Es gilt $a, b, c \neq 0$. Schreibe den Term in der Form $a^x \cdot b^y \cdot c^z$ mit $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

a) $\frac{(a^3 \cdot b^2)^4 \cdot c^{-2}}{a \cdot b^3 \cdot c^7} = \frac{a^{12} \cdot b^8 \cdot c^{-2}}{a \cdot b^3 \cdot c^7} = a^{11} \cdot b^5 \cdot c^{-9}$

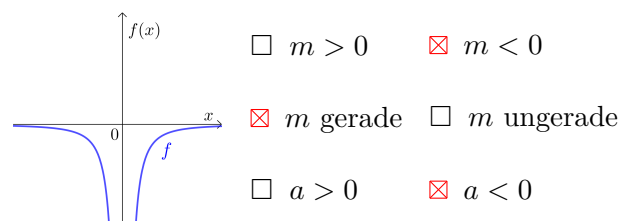
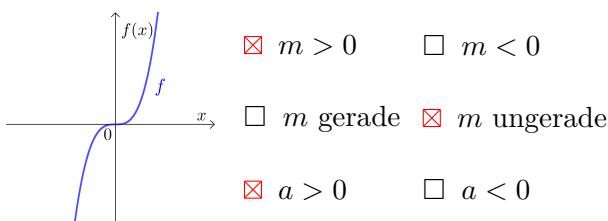
b) $\left(\frac{a^2 \cdot c}{b^3}\right)^3 \cdot \frac{b}{a^{-1} \cdot c^{-2}} = \frac{a^6 \cdot c^3 \cdot b^1}{b^9 \cdot a^{-1} \cdot c^{-2}} = a^7 \cdot b^{-8} \cdot c^5$


Potenzfunktionen 

Jede Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^m$ heißt **Potenzfunktion**.

Das qualitative Verhalten der Potenzfunktion hängt von den Parametern $a \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{Z}^*$ ab.

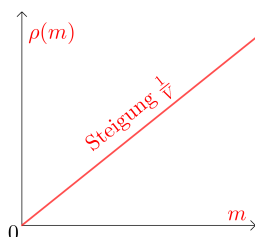
Ist m positiv oder negativ? Ist m gerade oder ungerade? Ist a positiv oder negativ? Kreuze jeweils an.



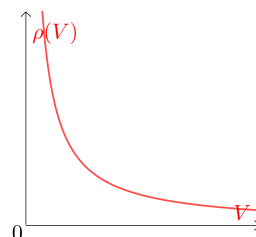
Masse – Volumen – Dichte 

Für die Masse m , das Volumen V und die konstante Dichte ρ eines Körpers gilt: $\rho = \frac{m}{V}$

a) Ist das Volumen konstant, hängt die Dichte nur von der Masse ab: $\rho(m) = \frac{m}{V} = \frac{1}{V} \cdot m$
Beschrifte unten die Achsen und skizziere einen möglichen Funktionsgraphen.



b) Ist die Masse konstant, hängt die Dichte nur vom Volumen ab: $\rho(V) = \frac{m}{V} = m \cdot V^{-1}$
Beschrifte unten die Achsen und skizziere einen möglichen Funktionsgraphen.



n-te Wurzel  **MmF**

Wir nehmen eine beliebige natürliche Zahl $n \geq 1$ und eine beliebige **reelle Zahl** $a \geq 0$.

Dann hat die Gleichung $x^n = a$ *genau eine* Lösung in \mathbb{R} , die $x \geq 0$ erfüllt.

Wir kürzen diese Lösung mit $x = \sqrt[n]{a}$ ab, und nennen sie die **n-te Wurzel aus a**.

Es gilt also: $(\sqrt[n]{a})^n = a$ „n-te Wurzel“ und „hoch n“ heben einander auf, wenn $a \geq 0$ gilt.

Im Fall $n = 2$ sprechen wir auch von der Quadratwurzel und schreiben nur \sqrt{a} statt $\sqrt[2]{a}$.

n-te Wurzel  **MmF**

Berechne ohne Taschenrechner.

- a) $\sqrt{9} = 3$ c) $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$ e) $\sqrt{230687^2} = 230687$ g) $\sqrt{2^2} = 2$
- b) $\sqrt[3]{8} = 2$ d) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$ f) $\sqrt[3]{42^4} = 42^{14}$ h) $\sqrt{(-2)^2} = 2$

$\sqrt{(-2)^2} = ?$  **MmF**


Die Gleichung $x^2 = 4$ hat genau 2 Lösungen, nämlich $x = \pm\sqrt{4}$, also $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$.

Mit dem Ausdruck $\sqrt{4}$ ist immer die *positive* Lösung gemeint, also: $\sqrt{4} = 2$ bzw. $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

Wenn $a \geq 0$ ist, dann gilt: $\sqrt{a^2} = a$

Wenn $a < 0$ ist, dann ist $-a > 0$ und es gilt: $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a$

Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt also: $\sqrt{a^2} = |a|$

Wurzeln und Grundrechnungsarten  **MmF**

Genau wie Potenzen sind auch Wurzeln mit den beiden Punktrechnungen (\cdot , $/$) kompatibel, aber *nicht* mit den beiden Strichrechnungen ($+$, $-$). Für alle $a \geq 0$ und $b \geq 0$ gilt nämlich:


$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Aber: $\sqrt{16 + 9} = 5 \neq 7 = \sqrt{16} + \sqrt{9}$ bzw. $\sqrt{25 - 16} = 3 \neq 1 = \sqrt{25} - \sqrt{16}$

Wurzelziehen  **MmF**

Es gilt $a, b > 0$. Ziehe die Wurzel.

- a) $\sqrt{a^6} = a^3$ b) $\sqrt{16 \cdot a^4} = 4 \cdot a^2$ c) $\sqrt{\frac{a^2}{b^4}} = \frac{a}{b^2}$ d) $\sqrt{25 \cdot a^2 - 16 \cdot a^2} = \sqrt{9 \cdot a^2} = 3 \cdot a$

Welche Zahl ist $9^{\frac{3}{2}}$?  **MmF**

Als Nächstes definieren wir die Potenz $a^{\frac{m}{n}}$ für alle **rationalen** Exponenten und $a > 0$.


Welche Zahl soll zum Beispiel $9^{\frac{3}{2}} = 9^{1,5}$ sein?

Damit alle Rechenregeln auch für diese Potenzen gelten, haben wir nur eine Möglichkeit.

Die beiden *positiven* Zahlen $9^{\frac{3}{2}}$ und $\sqrt[2]{9^3}$ ergeben dann nämlich beide mit sich selbst multipliziert 9^3 :


$$\left(9^{\frac{3}{2}}\right)^2 = 9^{\frac{3}{2} \cdot 2} = 9^3 \quad \text{und} \quad \left(\sqrt[2]{9^3}\right)^2 = 9^3$$

Also sind $9^{\frac{3}{2}}$ und $\sqrt[2]{9^3}$ nur verschiedene Schreibweisen für die *gleiche* Zahl: $9^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{9^3} = \left(\sqrt[2]{9}\right)^3 = 27$

Potenzen mit rationalen Exponenten 

Allgemein definieren wir Potenzen mit Basis $a > 0$ und rationalen Exponenten folgendermaßen:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Terme in Potenzschreibweise umwandeln 


Es gilt $a > 0$. Schreibe den Term in der Form $a^{\frac{m}{n}}$ an.

a) $\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$

c) $\frac{\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}} = \frac{a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{3}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}} = a^{\frac{9+4-6}{12}} = a^{\frac{7}{12}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[5]{a^2}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{5}}} = a^{-\frac{2}{5}}$

d) $\sqrt[4]{\sqrt[2]{a}} = (\sqrt[2]{a})^{\frac{1}{4}} = (a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{8}}$

Terme in Wurzelschreibweise umwandeln 


Es gilt $a > 0$. Schreibe den Term in der Form $\sqrt[n]{a^m}$ an.

a) $a^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{a^7}$

c) $\frac{a}{\sqrt{a}} = \frac{a}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{1-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

b) $\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} = a^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{a^{-3}}$

d) $\frac{a^2 \cdot \sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a^{-2}}} = \frac{a^2 \cdot a^{\frac{1}{5}}}{a^{-\frac{2}{3}}} = a^{2+\frac{1}{5}+\frac{2}{3}} = a^{\frac{30+3+10}{15}} = a^{\frac{43}{15}} = \sqrt[15]{a^{43}}$

Wurzelschreibweise ↔ Potenzschreibweise 

Es gilt $a > 0$. Trage jeweils natürliche Zahlen richtig in die Kästchen ein.

a) $\sqrt[3]{a^6} = a^2$ $\frac{6}{3} = 2$

b) $\sqrt[5]{a^{21}} = a^{4,2}$ $\frac{x}{5} = 4,2 \iff x = 21$

c) $\sqrt[15]{a^{63}} = a^{4,2}$ $\frac{63}{x} = 4,2 \iff x = \frac{63}{4,2} = 15$

d) $\sqrt[10]{a^{23}} = a^{2,3}$ $2,3 = \frac{23}{10}$

Potenzfunktion und Wurzelfunktion 

Rechts unten siehst du den Graphen der **Potenzfunktion** f mit $f(x) = x^3$ für $x \geq 0$ dargestellt.

Lies die folgenden Zahlen so genau wie möglich ab. Vergleiche dein Ergebnis mit dem Taschenrechner.

a) $0,6^3 \approx 0,2$

c) $\sqrt[3]{0,2} \approx 0,6$

b) $0,8^3 \approx 0,5$

d) $\sqrt[3]{0,4} \approx 0,75$

Die **Wurzelfunktion** g mit $g(x) = \sqrt[3]{x}$ ist die **Umkehrfunktion** der Potenzfunktion f .

Die Graphen von f und g sind also an der 1. Mediane gespiegelt.

Zu jedem Punkt $(x | x^3)$ am Graphen von f liegt der gespiegelte Punkt $(x^3 | x)$ am Graphen von g .

Tatsächlich gilt ja eben $g(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$.

