**Potenzen mit natürlichen Exponenten**

Wir verwenden die Potenzschreibweise, um uns Schreibarbeit zu ersparen:

$$\boldsymbol{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}}$$

Die Schreibweise $a^9$ ist praktischer als $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$.
Sprechweise: „*a hoch n*“ oder manchmal die „*n.te Potenz von a*“

Die Zahl $a$ heißt **Basis**, die Zahl $n$ heißt **Exponent**.

Berechne die folgenden Potenzen:

$2^3 =$ __________ $3^2 =$ __________ $5^1 =$ __________

$1^5 =$ __________ $0^2 =$ __________ $(-1)^3 =$ __________

**Rechenregeln für Potenzen**

Kannst du erklären, weshalb diese Rechenregeln gelten?

Denke zum Beispiel an $n = 3$ und $m = 2$.

**1)** $\boldsymbol{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$

**2)** $\boldsymbol{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$

**3)** $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$

**4)** $\boldsymbol{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$

Wir wollen $a^n$ für *alle* ganzen Zahlen $n$ definieren.

Damit die Rechenregeln für Potenzen weiter gelten, haben wir dafür nur eine Möglichkeit:

**Was ist $2^{-3}$?**

Versuche das Muster bis zur Potenz $2^{-3}$ nach links zu vervollständigen:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, bend right, "\cdot 2"'] & 2^1 \arrow[l, bend right, ": 2"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 2"'] & 2^2 \arrow[l, bend right, ": 2"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 2"'] & 2^3 \arrow[l, bend right, ": 2"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 2"'] & 2^4 \arrow[l, bend right, ": 2"'] & \ldots
\end{tikzcd}$$

$\Longrightarrow 2^0 =$ __________ $\Longrightarrow 2^{-1} =$ __________

$\Longrightarrow 2^{-2} =$ __________ $\Longrightarrow 2^{-3} =$ __________

**Potenzen mit ganzzahligen Exponenten**

Wenn der Exponent 0 oder eine negative ganze Zahl ist, dann gilt:

$$\boldsymbol{a^0 = 1}, \qquad \boldsymbol{a^{-1} = \frac{1}{a^1}}, \qquad \boldsymbol{a^{-2} = \frac{1}{a^2}}, \qquad \dots \qquad \boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

**Rechenregel für Potenzen**

Die folgende Regel gilt für alle ganzzahligen Exponenten $n$ und $m$:

$$\boldsymbol{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}.$$

Überprüfe die Rechenregel, wenn…

**1)** $n = 5$, $m = 2$ **2)** $n = 3$, $m = 3$ **3)** $n = 2$, $m = 5$ **4)** $n = -2$, $m = -3$.

**Rechnen mit Potenzen**

Schreibe die Terme in der Form $a^x \cdot b^y \cdot c^z$ mit $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

**a)** $\dfrac{(a^3 \cdot b^2)^4 \cdot c^{-2}}{a \cdot b^3 \cdot c^7} =$

**b)** $\left(\dfrac{a^2 \cdot c}{b^3}\right)^3 \cdot \dfrac{b^0}{c^{-2}} =$

**c)** $a^3 \cdot \left(\dfrac{b^5}{a \cdot c^{42}}\right)^0 \cdot \left((b^2)^3\right)^4 \cdot \dfrac{1}{c} =$

Der nächstgrößere Zahlenbereich nach den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ („Bruchzahlen").

**$n$.te Wurzel**

Zu jedem $a \geq 0$ und jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ gibt es genau eine Zahl $x \geq 0$, die eine Lösung der Gleichung

$$x^n = a$$

ist. Wir kürzen diese Zahl mit $\boldsymbol{\sqrt[n]{a}}$ ab und nennen sie die **$n$.te Wurzel aus $a$**. Es gilt also

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

„$n$.te Wurzel" und „hoch $n$" heben einander auf. Wir schreiben auch $\sqrt{a}$ statt $\sqrt[2]{a}$.

$\sqrt{(-2)^2} = 2$

Die Gleichung $x^2 = 4$ hat genau zwei Lösungen, nämlich $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$.
Die Wurzel aus 4, also $\sqrt{4}$, ist – wegen der Definition – die *positive* Lösung 2. Kurz: $\sqrt{4} = 2$

**Wurzeln von Hand berechnen**

Bestimme die folgenden Wurzeln ohne Taschenrechner.

**1)** $\sqrt[3]{8} =$

**2)** $\sqrt{9} =$

**3)** $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} =$

**4)** $\sqrt{230687^2} =$

**5)** $\sqrt[3]{42^{42}} =$

**6)** $\sqrt[42]{1} =$

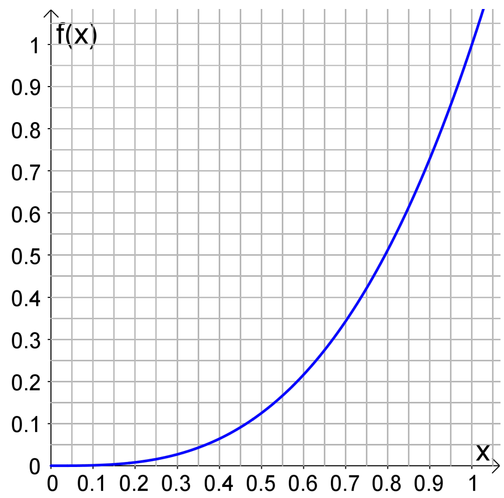
**7)** $\sqrt[42]{0} =$

**8)** $\sqrt{\frac{9}{25}} =$

**9)** $\sqrt{(-3)^2} =$

**Potenzfunktion und Wurzelfunktion**

Rechts siehst du den Graphen der Potenzfunktion $f(x) = x^3$.




Lies die folgenden Zahlen rechts so genau du kannst ab.
Vergleiche dein Ergebnis mit dem TR:

**a)** $0{,}6^3 \approx$

**b)** $0{,}8^3 \approx$

**c)** $\sqrt[3]{0{,}2} \approx$

**d)** $\sqrt[3]{0{,}4} \approx$

Die Wurzelfunktion $g(x) = \sqrt[3]{x}$ ist die Umkehrfunktion von $f(x) = x^3$.

Zeichne ihren Graphen oben ein.

**Rechenregeln für Wurzeln**

Vereinfache so weit wie möglich:

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n =$$

$$(\sqrt[n]{a})^{n \cdot k} = \left((\sqrt[n]{a})^n\right)^k =$$

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m \cdot n} =$$

Erkläre damit die Rechenregeln für das Wurzelziehen:

**1)** $\boldsymbol{\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$

**2)** $\boldsymbol{\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m}$

**3)** $\boldsymbol{\sqrt[n \cdot k]{a^k} = \sqrt[n]{a}}$

**4)** $\boldsymbol{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}}$

Was soll eine Potenz wie $9^{\frac{3}{2}}$ mit gebrochenem Exponenten sein? Wollen wir, dass die Rechenregeln für Potenzen weiter gelten, wobei wir im Exponenten einfach Bruchrechnen, gibt es nur eine Antwort:

**Quadratisch, praktisch, gleich**

Erkläre, welche Eigenschaften in den beiden folgenden Rechnungen verwendet werden:

$$\left(9^{\frac{3}{2}}\right)^2 = 9^{\frac{3}{2}\cdot 2} = 9^3$$

$$\left(\sqrt[2]{9^3}\right)^2 = \sqrt[2]{9^3} \cdot \sqrt[2]{9^3} = 9^3$$

Die beiden positiven Zahlen $9^{\frac{3}{2}}$ und $\sqrt[2]{9^3}$ ergeben beide mit sich selbst multipliziert $9^3$.
Also muss $9^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{9^3} = \left(\sqrt[2]{9}\right)^3 = 3^3 = 27$ sein. Kontrolliere mit dem Taschenrechner.

**Potenzen mit rationalen Exponenten**

Für Potenzen mit Basis $a \geq 0$ und rationalem Exponenten $\frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}.$$

Es gilt ja, dass $\sqrt[k\cdot m]{a^{k\cdot n}} = \sqrt[n]{a^m}$ für $k \in \mathbb{N}$. Warum spielt das hier eine Rolle? Wir hoffen, dass $a^{\frac{2}{4}} = a^{\frac{1}{2}}$.

Alle Rechenregeln gelten weiterhin, und du kannst mit dem Bruch im Exponenten wie gewohnt rechnen.

**Zusammenfassung**

- Die Potenz $a^x$ ist für jede Basis $a \geq 0$ und jede rationale Zahl $x$ eine bestimmte, nichtnegative Zahl.

  Zum Beispiel ist $2^4 =$ __________, $3^{-2} =$ __________ und $8^{\frac{2}{3}} =$ __________.
- Es gelten die Rechenregeln für Potenzen:

  **1)** $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ **2)** $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ **3)** $(a\cdot b)^x = a^x \cdot b^x$ **4)** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$ **5)** $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$
- Beim Bilden des Kehrwerts verdreht sich das Vorzeichen im Exponenten:

  $$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{a^{-x}} = a^x.$$
- Eine Potenz mit rationalem Exponenten können wir als Wurzel schreiben und umgekehrt:

  $$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

**Rechnen mit Wurzeln**

Beim Rechnen mit Wurzeln kannst du also alle Wurzeln in Potenzen umschreiben und dann die Rechenregeln für Potenzen verwenden. Schreibe den folgenden Term in der Form $a^x \cdot b^y \cdot c^z$ mit $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

$$\frac{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{b \cdot c^4}}{a^5 \cdot \sqrt[6]{b^2 \cdot c^{-2}}} =$$

Bekanntlich können wir nicht jede Zahl als Bruch darstellen. Die Kreiszahl $\pi$ ist eine solche irrationale Zahl. Aber was soll dann $2^\pi = 2^{3{,}1415926\ldots}$ bedeuten? Tatsächlich können wir $a^x$ auch für jede irrationale Zahl $x$ so definieren, dass alle Rechenregeln für Potenzen erhalten bleiben. Rechne $2^\pi$ mit dem Taschenrechner aus.