



Wir verwenden die Potenzschreibweise, um uns Schreibarbeit zu ersparen:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

Die Schreibweise a^9 ist praktischer als $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$.
Sprechweise: „a hoch n“ oder manchmal die „n.te Potenz von a“

Die Zahl a heißt **Basis**, die Zahl n heißt **Exponent**.

Berechne die folgenden Potenzen:

$2^3 = \underline{\hspace{2cm}}$

$3^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

$5^1 = \underline{\hspace{2cm}}$

$1^5 = \underline{\hspace{2cm}}$

$0^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

$(-1)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$

Rechenregeln für Potenzen



Kannst du erklären, weshalb diese Rechenregeln gelten?

Denke zum Beispiel an $n = 3$ und $m = 2$.

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

3) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

4) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

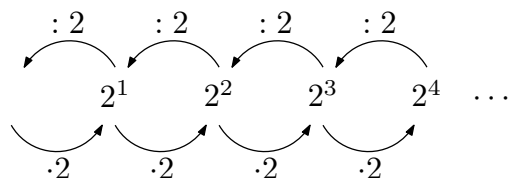
Wir wollen a^n für *alle* ganzen Zahlen n definieren.

Damit die Rechenregeln für Potenzen weiter gelten, haben wir dafür nur eine Möglichkeit:

Was ist 2^{-3} ?



Versuche das Muster bis zur Potenz 2^{-3} nach links zu vervollständigen:



$\Rightarrow 2^0 = \underline{\hspace{2cm}}$

$\Rightarrow 2^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$

$\Rightarrow 2^{-2} = \underline{\hspace{2cm}}$

$\Rightarrow 2^{-3} = \underline{\hspace{2cm}}$



Wenn der Exponent 0 oder eine negative ganze Zahl ist, dann gilt:

$$a^0 = 1, \quad a^{-1} = \frac{1}{a^1}, \quad a^{-2} = \frac{1}{a^2}, \quad \dots \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Rechenregel für Potenzen



Die folgende Regel gilt für alle ganzzahligen Exponenten n und m :

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

Überprüfe die Rechenregel, wenn...

- 1) $n = 5, m = 2$ 2) $n = 3, m = 3$ 3) $n = 2, m = 5$ 4) $n = -2, m = -3$.

Rechnen mit Potenzen



Schreibe die Terme in der Form $a^x \cdot b^y \cdot c^z$ mit $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

a) $\frac{(a^3 \cdot b^2)^4 \cdot c^{-2}}{a \cdot b^3 \cdot c^7} =$

b) $\left(\frac{a^2 \cdot c}{b^3}\right)^3 \cdot \frac{b^0}{c^{-2}} =$

c) $a^3 \cdot \left(\frac{b^5}{a \cdot c^{42}}\right)^0 \cdot ((b^2)^3)^4 \cdot \frac{1}{c} =$

Der nächstgrößere Zahlenbereich nach den ganzen Zahlen \mathbb{Z} sind die rationalen Zahlen \mathbb{Q} („Bruchzahlen“).

n .te Wurzel



Zu jedem $a \geq 0$ und jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ gibt es genau eine Zahl $x \geq 0$, die eine Lösung der Gleichung

$$x^n = a$$

ist. Wir kürzen diese Zahl mit $\sqrt[n]{a}$ ab und nennen sie die **n .te Wurzel aus a** . Es gilt also

$$(\sqrt[n]{a})^n = a. \quad \text{„}n\text{.te Wurzel“ und „hoch } n\text{“ heben einander auf. Wir schreiben auch } \sqrt{a} \text{ statt } \sqrt[2]{a}.$$

$$\sqrt{(-2)^2} = 2$$



Die Gleichung $x^2 = 4$ hat genau zwei Lösungen, nämlich $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$.

Die Wurzel aus 4, also $\sqrt{4}$, ist – wegen der Definition – die *positive* Lösung 2. Kurz: $\sqrt{4} = 2$

Wurzeln von Hand berechnen

Bestimme die folgenden Wurzeln ohne Taschenrechner.

1) $\sqrt[3]{8} =$

4) $\sqrt{230687^2} =$

7) $\sqrt[42]{0} =$

2) $\sqrt{9} =$

5) $\sqrt[3]{42^{42}} =$

8) $\sqrt{\frac{9}{25}} =$

3) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} =$

6) $\sqrt[42]{1} =$

9) $\sqrt{(-3)^2} =$

Potenzfunktion und Wurzelfunktion

Rechts siehst du den Graphen der Potenzfunktion $f(x) = x^3$.

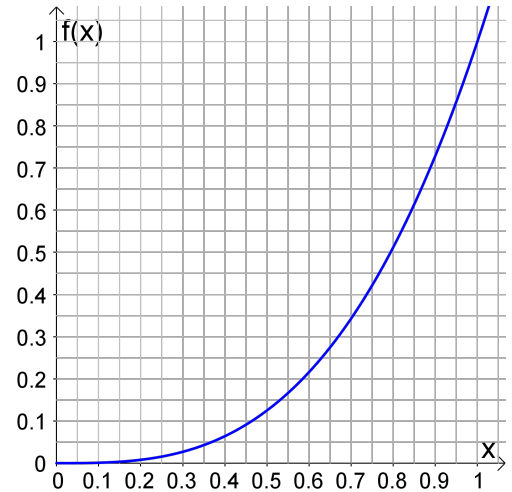
Lies die folgenden Zahlen rechts so genau du kannst ab. Vergleiche dein Ergebnis mit dem TR:

a) $0,6^3 \approx$

b) $0,8^3 \approx$

c) $\sqrt[3]{0,2} \approx$

d) $\sqrt[3]{0,4} \approx$



Die Wurzelfunktion $g(x) = \sqrt[3]{x}$ ist die Umkehrfunktion von $f(x) = x^3$.

Zeichne ihren Graphen oben ein.

Rechenregeln für Wurzeln

Vereinfache so weit wie möglich:

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n =$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n \cdot k} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^k =$$

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m \cdot n} =$$

Erkläre damit die Rechenregeln für das Wurzelziehen:


1) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

2) $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

3) $\sqrt[n \cdot k]{a^k} = \sqrt[n]{a}$

4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Was soll eine Potenz wie $9^{\frac{3}{2}}$ mit gebrochenem Exponenten sein? Wollen wir, dass die Rechenregeln für Potenzen weiter gelten, wobei wir im Exponenten einfach Bruchrechnen, gibt es nur eine Antwort:

Quadratisch, praktisch, gleich 


Erkläre, welche Eigenschaften in den beiden folgenden Rechnungen verwendet werden:

$$\left(9^{\frac{3}{2}}\right)^2 = 9^{\frac{3}{2} \cdot 2} = 9^3$$

$$\left(\sqrt[2]{9^3}\right)^2 = \sqrt[2]{9^3} \cdot \sqrt[2]{9^3} = 9^3$$


Die beiden positiven Zahlen $9^{\frac{3}{2}}$ und $\sqrt[2]{9^3}$ ergeben beide mit sich selbst multipliziert 9^3 .

Also muss $9^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{9^3} = \left(\sqrt[2]{9}\right)^3 = 3^3 = 27$ sein. Kontrolliere mit dem Taschenrechner.

Potenzen mit rationalen Exponenten 


Für Potenzen mit Basis $a \geq 0$ und rationalem Exponenten $\frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Es gilt ja, dass $\sqrt[k \cdot n]{a^{k \cdot m}} = \sqrt[n]{a^m}$ für $k \in \mathbb{N}$. Warum spielt das hier eine Rolle? 

Wir hoffen, dass $a^{\frac{2}{4}} = a^{\frac{1}{2}}$.

Alle Rechenregeln gelten weiterhin, und du kannst mit dem Bruch im Exponenten wie gewohnt rechnen.

Zusammenfassung 

- Die Potenz a^x ist für jede Basis $a \geq 0$ und jede rationale Zahl x eine bestimmte, nichtnegative Zahl.

Zum Beispiel ist $2^4 =$ _____, $3^{-2} =$ _____ und $8^{\frac{2}{3}} =$ _____.

- Es gelten die Rechenregeln für Potenzen:


1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ 2) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ 3) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$ 4) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ 5) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

- Beim Bilden des Kehrwerts dreht sich das Vorzeichen im Exponenten:

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{a^{-x}} = a^x.$$

- Eine Potenz mit rationalem Exponenten können wir als Wurzel schreiben und umgekehrt:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Rechnen mit Wurzeln 

Beim Rechnen mit Wurzeln kannst du also alle Wurzeln in Potenzen umschreiben und dann die Rechenregeln für Potenzen verwenden. Schreibe den folgenden Term in der Form $a^x \cdot b^y \cdot c^z$ mit $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

$$\frac{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{b} \cdot c^4}{a^5 \cdot \sqrt[6]{b^2} \cdot c^{-2}} =$$

Bekanntlich können wir nicht jede Zahl als Bruch darstellen. Die Kreiszahl π ist eine solche irrationale Zahl. Aber was soll dann $2^\pi = 2^{3,1415926\dots}$ bedeuten? Tatsächlich können wir a^x auch für jede irrationale Zahl x so definieren, dass alle Rechenregeln für Potenzen erhalten bleiben. Rechne 2^π mit dem Taschenrechner aus.