Vektor

Jedes Zahlenpaar $\vec{a} = \binom{a_1}{a_2}$ heißt **Vektor**.
Die Zahlen $a_1,\, a_2 \in \mathbb{R}$ heißen **Komponenten** des Vektors.

Jeder Vektor kann geometrisch als Verschiebung interpretiert werden:
$a_1 \ldots$ Verschiebung in horizontaler Richtung
$a_2 \ldots$ Verschiebung in vertikaler Richtung

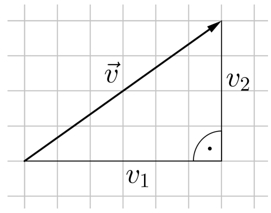
Zeichne folgende Vektoren als Pfeile im Raster ein:

1) $\vec{a} = \binom{2}{3}$ **2)** $\vec{b} = \binom{4}{-1}$ **3)** $\vec{c} = \binom{-5}{2}$

4) $\vec{d} = \binom{-4}{-3}$ **5)** $\vec{e} = \binom{0}{2}$ **6)** $\vec{f} = \binom{-1}{0}$

Betrag eines Vektors

Für die **Länge** (**„Betrag“**) eines Vektors $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ schreiben wir $|\vec{v}|$.



$|\vec{v}| =$ ____________________

Rechenoperationen mit Vektoren

Addition zweier Vektoren: $\vec{v} + \vec{w} = \binom{v_1}{v_2} + \binom{w_1}{w_2} = \binom{v_1+w_1}{v_2+w_2}$

Zeichne die Vektoren $\vec{v} = \binom{4}{2}$, $\vec{w} = \binom{2}{-3}$ und $\vec{v} + \vec{w}$ als Pfeile im Raster ein.

$\vec{v} + \vec{w} =$ ____________________ (vgl. Kräfteaddition)

Beschreibe den Zusammenhang zwischen $\vec{v}$, $\vec{w}$, und $\vec{v} + \vec{w}$ grafisch.

Multiplikation mit einem Skalar: $r \cdot \vec{v} = r \cdot \binom{v_1}{v_2} = \binom{r \cdot v_1}{r \cdot v_2}$

(In der Vektorrechnung wird für eine Zahl $r \in \mathbb{R}$ auch der Begriff **Skalar** verwendet.)

Zeichne den Vektor $\vec{v} = \binom{4}{-2}$ sowie die folgenden Vektoren als Pfeile im Raster ein:

$2 \cdot \vec{v} =$ __________ $\frac{1}{2} \cdot \vec{v} =$ __________ $(-1) \cdot \vec{v} =$ __________

Einheitsvektor

Jeden Vektor mit Länge 1 nennen wir auch **Einheitsvektor**. Der Vektor

$\vec{v_0} =$ ____________________

hat die gleiche Richtung und Orientierung wie $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ und ist ein Einheitsvektor:

$|\vec{v_0}| =$ ____________________

Vektor und Gegenvektor

Jeder Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ hat einen sogenannten **Gegenvektor**:

$-\vec{v} =$ ______ (Wie bei der Zahl 42 und ihrer Gegenzahl -42 ist das „$-$“ ein Vorzeichen.)

Die Summe von Vektor und Gegenvektor ergibt den **Nullvektor**:

$\vec{v} + (-\vec{v}) =$

Subtraktion zweier Vektoren

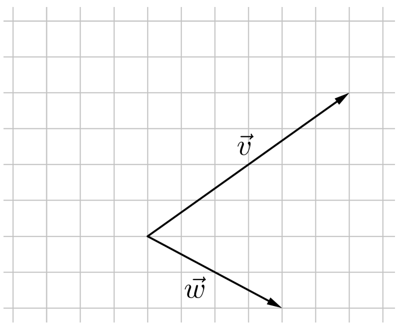
Subtraktion zweier Vektoren: $\boldsymbol{\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w}) = \begin{pmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \end{pmatrix}}$

Um $\vec{v} - \vec{w}$ grafisch darzustellen, gibt es zwei Möglichkeiten:

1) $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} +$ ______ **2)** $\vec{w} + (\vec{v} - \vec{w}) =$ ______

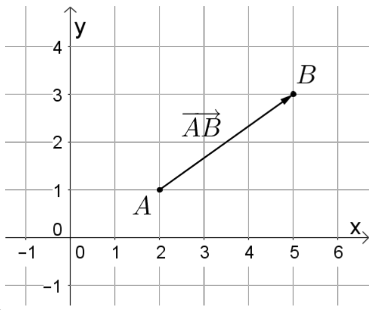
Zeichne $\vec{v} - \vec{w}$ auf beide Arten ein.
Berechne $\vec{v} - \vec{w}$ und kontrolliere das Ergebnis grafisch.

$\vec{v} =$ ______ $\vec{w} =$ ______ $\vec{v} - \vec{w} =$ ______



„Spitze minus Schaft – Regel“

Für den Vektor mit Anfangspunkt A und Endpunkt B schreiben wir auch kurz $\overrightarrow{AB}$.



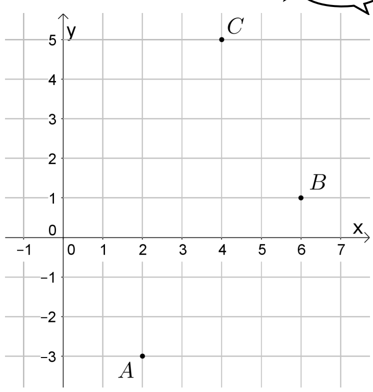
$A =$ ______ $B =$ ______ $\overrightarrow{AB} =$ ______

Für alle Punkte $A = (a_1 \mid a_2)$ und $B = (b_1 \mid b_2)$ gilt:

$\overrightarrow{AB} =$ ______ **„Spitze minus Schaft – Regel“**

$\overrightarrow{AB} =$ ______ $\overrightarrow{BC} =$ ______

$\overrightarrow{AC} =$ ______ $\overrightarrow{BA} =$ ______



Erkläre die Eigenschaften

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

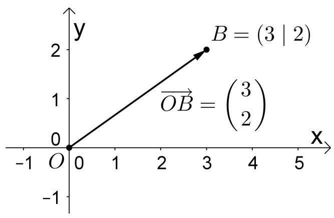
geometrisch anhand von Bewegungen.

Ortsvektor

Befindet sich der Anfangspunkt eines Vektors im Koordinatenursprung $O = (0 \mid 0)$, nennen wir den Vektor $\overrightarrow{OB} = \binom{b_1}{b_2}$ auch **Ortsvektor**.
Wir unterscheiden Punkt und Vektor anhand der Schreibweise:

Punkt $B = (b_1 \mid b_2)$ (Zeilenschreibweise)

Ortsvektor $\overrightarrow{OB} = \binom{b_1}{b_2}$ (Spaltenschreibweise)



Normalvektoren

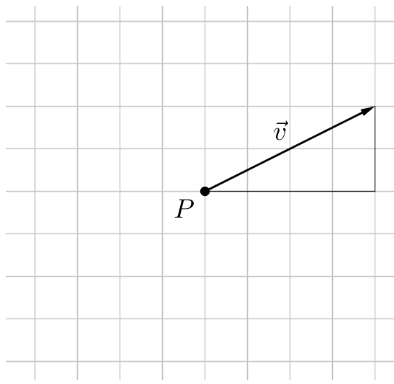
Du befindest dich im Punkt P und sollst die Bewegung $\vec{v} = \binom{4}{2}$ durchführen.

1) Stattdessen drehst du dich zuerst um 90° „nach links" (gegen den Uhrzeigersinn) und führst anschließend die Bewegung durch. Zeichne den dadurch entstandenen Vektor $\overrightarrow{v_L}$ ein und schreibe ihn als Zahlenpaar an:

$\overrightarrow{v_L} =$ __________

2) Drehst du den Vektor stattdessen um 90° „nach rechts" (im Uhrzeigersinn), nennen wir den entstandenen Vektor $\overrightarrow{v_R}$. Zeichne ihn ein und schreibe ihn als Zahlenpaar an:

$\overrightarrow{v_R} =$ __________



Die beiden Vektoren

$$\boldsymbol{\overrightarrow{v_L} = \binom{-v_2}{v_1}} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\overrightarrow{v_R} = \binom{v_2}{-v_1}}$$

(Sie stehen normal, also im rechten Winkel auf $\vec{v}$.)

nennen wir daher auch **Normalvektoren von $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$**.

Skalarprodukt

Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ und $\vec{w} = \binom{w_1}{w_2}$ ist

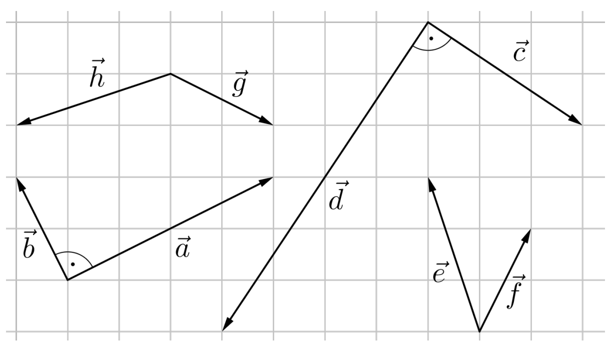
$$\boldsymbol{\vec{v} \cdot \vec{w} = \binom{v_1}{v_2} \cdot \binom{w_1}{w_2} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2}.$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} =$ ____________________

$\vec{c} \cdot \vec{d} =$ ____________________

$\vec{e} \cdot \vec{f} =$ ____________________

$\vec{g} \cdot \vec{h} =$ ____________________



Wir müssen das Skalarprodukt sorgsam von der Multiplikation mit einem Skalar unterscheiden:

- Beim Skalarprodukt $\vec{v} \cdot \vec{w}$ sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ______________________________ .

  Das Ergebnis $v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2$ ist ______________________________ .

- Bei der Multiplikation mit einem Skalar $r \cdot \vec{v}$ ist r ________________________ und

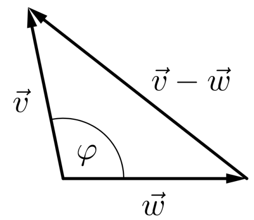
  $\vec{v}$ ________________________ .

  Das Ergebnis $\begin{pmatrix} r \cdot v_1 \\ r \cdot v_2 \end{pmatrix}$ ist ______________________________ .

Skalarprodukt und Winkel

Der von zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ eingeschlossene Winkel φ erfüllt

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}\,.$$



Erklärung:

Cosinussatz: $|\vec{v} - \vec{w}|^2 =$

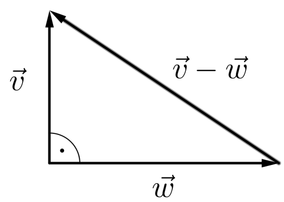
$$|\vec{v} - \vec{w}|^2 = \left|\begin{pmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \end{pmatrix}\right|^2 =$$

$$|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 =$$

$$\implies |\vec{v} - \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ stehen genau dann im rechten Winkel zueinander, wenn

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0.$$



Schnelltest für Winkelarten

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \iff$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} > 0 \iff$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} < 0 \iff$$