



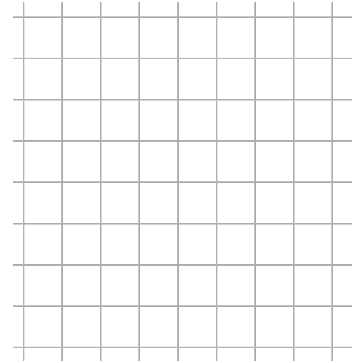
Jedes Zahlenpaar $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ heißt **Vektor**.
Die Zahlen $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ heißen **Komponenten** des Vektors.

Jeder Vektor kann geometrisch als Verschiebung interpretiert werden:
 $a_1 \dots$ Verschiebung in horizontaler Richtung
 $a_2 \dots$ Verschiebung in vertikaler Richtung

Zeichne folgende Vektoren als Pfeile im Raster ein:

1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 2) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ 3) $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

4) $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ 5) $\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 6) $\vec{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

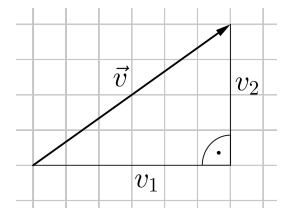


Betrag eines Vektors



Für die **Länge** („Betrag“) eines Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ schreiben wir $|\vec{v}|$.

$|\vec{v}| =$ _____



Rechenoperationen mit Vektoren



Addition zweier Vektoren: $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}$

Zeichne die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} + \vec{w}$ als Pfeile im Raster ein.

$\vec{v} + \vec{w} =$ _____ (vgl. Kräfteaddition)

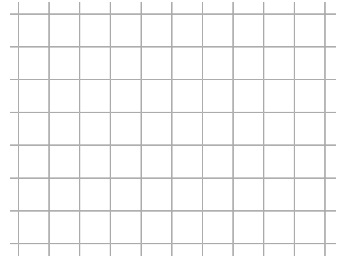
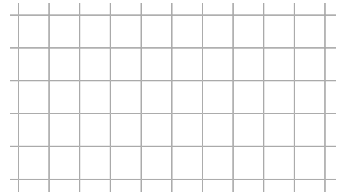
Beschreibe den Zusammenhang zwischen \vec{v} , \vec{w} und $\vec{v} + \vec{w}$ grafisch.

Multiplikation mit einem Skalar: $r \cdot \vec{v} = r \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot v_1 \\ r \cdot v_2 \end{pmatrix}$

(In der Vektorrechnung wird für eine Zahl $r \in \mathbb{R}$ auch der Begriff **Skalar** verwendet.)

Zeichne den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ sowie die folgenden Vektoren als Pfeile im Raster ein:

$2 \cdot \vec{v} =$ _____ $\frac{1}{2} \cdot \vec{v} =$ _____ $(-1) \cdot \vec{v} =$ _____



Einheitsvektor



Jeden Vektor mit Länge 1 nennen wir auch **Einheitsvektor**. Der Vektor

$\vec{v}_0 =$ _____

hat die gleiche Richtung und Orientierung wie $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ und ist ein Einheitsvektor:

$|\vec{v}_0| =$ _____



Jeder Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ hat einen sogenannten **Gegenvektor**:

$-\vec{v} =$ _____ (Wie bei der Zahl 42 und ihrer Gegenzahl -42 ist das „-“ ein Vorzeichen.)

Die Summe von Vektor und Gegenvektor ergibt den **Nullvektor**:

$\vec{v} + (-\vec{v}) =$ _____



Subtraktion zweier Vektoren: $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w}) = \begin{pmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \end{pmatrix}$

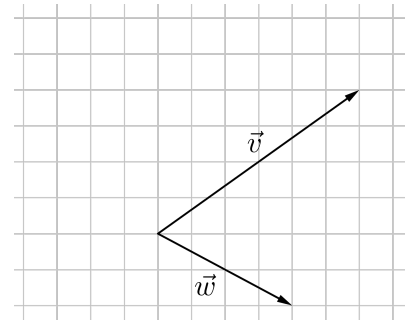
Um $\vec{v} - \vec{w}$ grafisch darzustellen, gibt es zwei Möglichkeiten:

- 1) $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} +$ _____ 2) $\vec{w} + (\vec{v} - \vec{w}) =$ _____

Zeichne $\vec{v} - \vec{w}$ auf beide Arten ein.

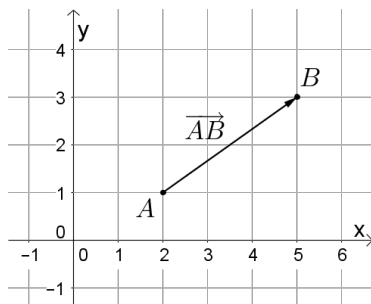
Berechne $\vec{v} - \vec{w}$ und kontrolliere das Ergebnis grafisch.

$\vec{v} =$ _____ $\vec{w} =$ _____ $\vec{v} - \vec{w} =$ _____



„Spitze minus Schaft – Regel“

Für den Vektor mit Anfangspunkt A und Endpunkt B schreiben wir auch kurz \vec{AB} .



$A =$ _____ $B =$ _____ $\vec{AB} =$ _____

Für alle Punkte $A = (a_1 | a_2)$ und $B = (b_1 | b_2)$ gilt:

$\vec{AB} =$ _____ „Spitze minus Schaft – Regel“

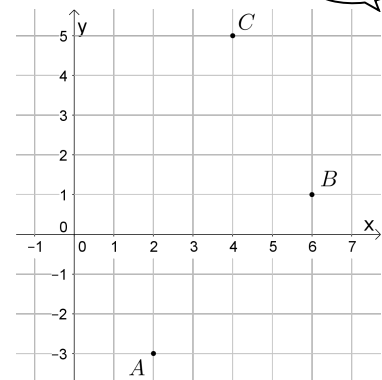
$\vec{AB} =$ _____ $\vec{BC} =$ _____

$\vec{AC} =$ _____ $\vec{BA} =$ _____

Erkläre die Eigenschaften

$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ und $\vec{AB} = -\vec{BA}$

geometrisch anhand von Bewegungen.



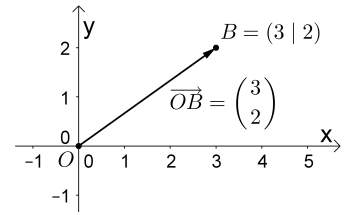
Ortsvektor



Befindet sich der Anfangspunkt eines Vektors im Koordinatenursprung $O = (0 | 0)$, nennen wir den Vektor $\vec{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ auch **Ortsvektor**.
Wir unterscheiden Punkt und Vektor anhand der Schreibweise:

Punkt $B = (b_1 | b_2)$ (Zeilenschreibweise)

Ortsvektor $\vec{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ (Spaltenschreibweise)



Normalvektoren



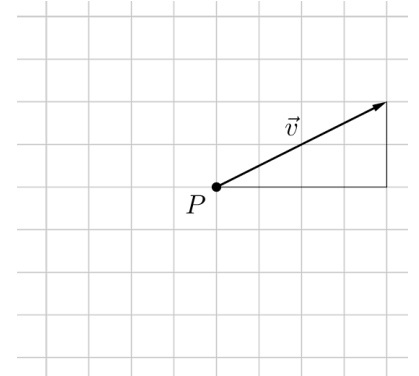
Du befindest dich im Punkt P und sollst die Bewegung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ durchführen.

- 1) Stattdessen drehst du dich zuerst um 90° „nach links“ (gegen den Uhrzeigersinn) und führst anschließend die Bewegung durch. Zeichne den dadurch entstandenen Vektor \vec{v}_L ein und schreibe ihn als Zahlenpaar an:

$\vec{v}_L =$ _____

- 2) Drehst du den Vektor stattdessen um 90° „nach rechts“ (im Uhrzeigersinn), nennen wir den entstandenen Vektor \vec{v}_R . Zeichne ihn ein und schreibe ihn als Zahlenpaar an:

$\vec{v}_R =$ _____



Die beiden Vektoren

$\vec{v}_L = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_R = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}$ (Sie stehen normal, also im rechten Winkel auf \vec{v} .)

nennen wir daher auch **Normalvektoren von $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$** .

Skalarprodukt



Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ ist

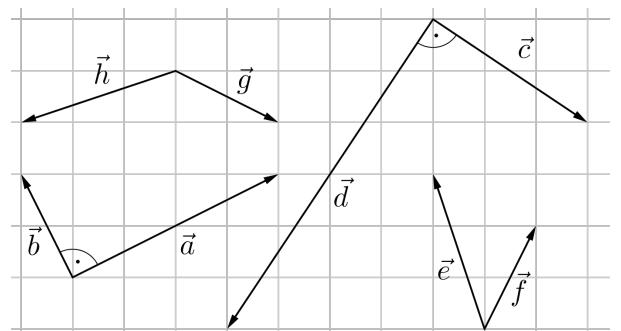
$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2.$

$\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____

$\vec{c} \cdot \vec{d} =$ _____

$\vec{e} \cdot \vec{f} =$ _____

$\vec{g} \cdot \vec{h} =$ _____





Wir müssen das Skalarprodukt sorgsam von der Multiplikation mit einem Skalar unterscheiden:

- Beim Skalarprodukt $\vec{v} \cdot \vec{w}$ sind \vec{v} und \vec{w} _____.

Das Ergebnis $v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2$ ist _____.

- Bei der Multiplikation mit einem Skalar $r \cdot \vec{v}$ ist r _____ und

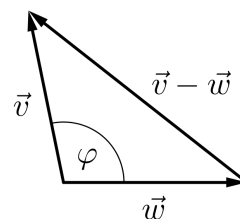
\vec{v} _____.

Das Ergebnis $\begin{pmatrix} r \cdot v_1 \\ r \cdot v_2 \end{pmatrix}$ ist _____.

Skalarprodukt und Winkel

Der von zwei Vektoren \vec{v} und \vec{w} eingeschlossene Winkel φ erfüllt

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}.$$



Erklärung:

Cosinussatz: $|\vec{v} - \vec{w}|^2 =$

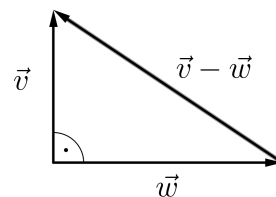
$$|\vec{v} - \vec{w}|^2 = \left| \begin{pmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \end{pmatrix} \right|^2 =$$

$$|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 =$$

$$\implies |\vec{v} - \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - \underline{\hspace{2cm}}$$

Zwei Vektoren \vec{v} und \vec{w} stehen genau dann im rechten Winkel zueinander, wenn

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0.$$



Schnelltest für Winkelarten

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \iff$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} > 0 \iff$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} < 0 \iff$$

