Höherdimensionale Vektoren

Ein **dreidimensionaler Vektor** ist ein Zahlentripel $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

Wie wohl ein fünfdimensionaler Vektor aussieht?

Vektorrechnen

Mit höherdimensionalen Vektoren rechnen wir genauso wie mit Vektoren in der Ebene:

- **Addition zweier Vektoren:** $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} =$
- **Vielfaches eines Vektors:** $r \cdot \vec{v} = r \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} =$
- **Gegenvektor eines Vektors:** $-\vec{v} =$
- **Subtraktion zweier Vektoren:** $\vec{v} - \vec{w} =$

„Spitze minus Schaft – Regel“

Wir können dreidimensionale Vektoren als Verschiebungspfeil im Raum darstellen.

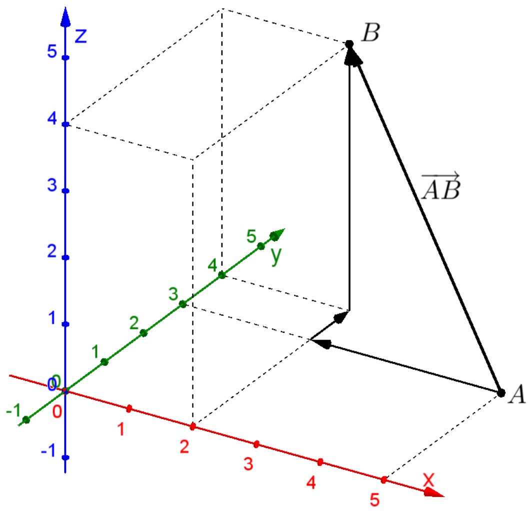
Vektor $\overrightarrow{AB}$: Anfangspunkt $A = (a_1 \mid a_2 \mid a_3)$
Endpunkt $B = (b_1 \mid b_2 \mid b_3)$

$A =$ ____________ $B =$ ____________

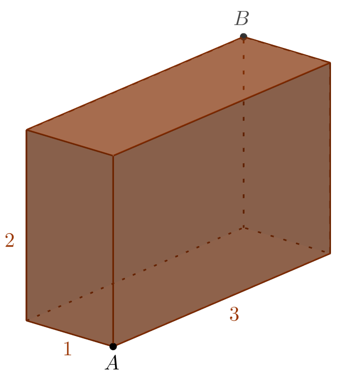
$\overrightarrow{AB} =$ ____________

Hier gilt die **„Spitze minus Schaft – Regel“**:

$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}} =$ ____________________



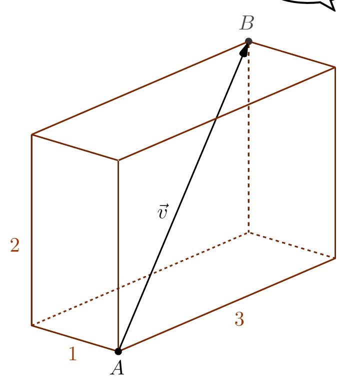
Raumdiagonale eines Quaders



Erkläre, weshalb die Eckpunkte A und B des Quaders

$$\sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

Einheiten voneinander entfernt sind.



Betrag eines Vektors

Die **Länge** (**Betrag**) des dreidimensionalen Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ beträgt

$|\boldsymbol{\vec{v}}| =$

Skalarprodukt

Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ ist

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \underline{\hspace{8cm}}$$

Winkel zwischen zwei Vektoren

Der von zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ eingeschlossene Winkel φ erfüllt

$$\cos(\varphi) = \frac{\underline{\hspace{3cm}}}{\underline{\hspace{3cm}}}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \iff$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} > 0 \iff$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} < 0 \iff$$

Vektorprodukt

Das **Vektorprodukt** zweier Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist der Vektor

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - w_2 \cdot v_3 \\ -(v_1 \cdot w_3 - w_1 \cdot v_3) \\ v_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot v_2 \end{pmatrix}.$$

Sprechweise: „$\vec{v}$ kreuz $\vec{w}$“
„Kreuzprodukt“

Eigenschaften des Vektorprodukts

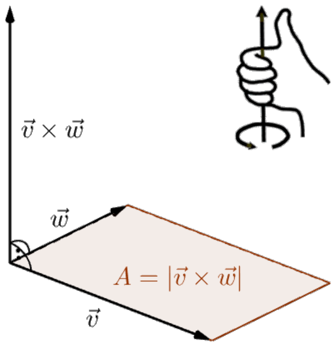
1) Das Vektorprodukt $\vec{v} \times \vec{w}$ steht normal auf ________________

2) Die Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ und $\vec{v} \times \vec{w}$ bilden ein ________________

(Strecke den rechten Daumen in Richtung $\vec{v} \times \vec{w}$ und schraube gegen den Uhrzeigersinn.)

3) Die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ spannen ein ________________

mit Flächeninhalt ________________ auf.



Wir müssen Vektorprodukt, Skalarprodukt, und Multiplikation mit einem Skalar gewissenhaft unterscheiden.

- Beim Skalarprodukt $\vec{v} \cdot \vec{w}$ sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ________________________ .

  Das Ergebnis $v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3$ ist ________________________ .

- Bei der Multiplikation mit einem Skalar $r \cdot \vec{v}$ ist r ________________ und

  $\vec{v}$ ________________ . Das Ergebnis $\begin{pmatrix} r \cdot v_1 \\ r \cdot v_2 \\ r \cdot v_3 \end{pmatrix}$ ist ________________ .

- Beim Vektorprodukt $\vec{v} \times \vec{w}$ sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ________________________ .

  Das Ergebnis $\begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - w_2 \cdot v_3 \\ -(v_1 \cdot w_3 - w_1 \cdot v_3) \\ v_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot v_2 \end{pmatrix}$ ist ________________________ .