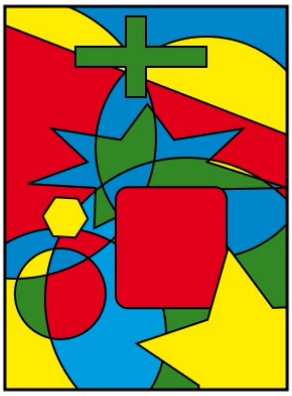
DER FÜNF–FARBEN–SATZ

MARKUS FULMEK

Der Vier–Farben-Satz besagt, dass man die Länder einer beliebigen **Landkarte** mit **nur vier** Farben so einfärben kann, dass keine zwei aneinander grenzenden Länder die gleiche Farbe haben. (Ein „Land“ muss hier **zusammenhängend** sein, und „aneinander grenzend“ heißt, dass zwei Länder eine gemeinsame Grenze haben, die **nicht** nur aus einem einzelnen Punkt besteht.)

Hier ein Beispiel für eine solche Färbung[1]:



Die Richtigkeit dieses Satzes wurde bereits 1852 vermutet, der Beweis ist aber schwierig und gelang erstmals 1976 mit Hilfe des Computers. Sehr viel einfacher zu beweisen ist, dass jede Landkarte (im obigen Sinn) immer mit **nur fünf** Farben eingefärbt werden kann [2].

Dazu „übersetzt“ man dieses Färbungsproblem in die Sprache der Graphentheorie; der Satz lautet dann:

> Jeder planare Graph ohne Schlingen hat eine Knotenfärbung mit 5 Farben.

Abgesehen von grundlegenden graphentheoretischen Begriffen (Knoten, Kanten, Zusammenhang, Grad, Planarität, Fläche, Färbung) und ein paar „Abzählungstricks“ (die man auch in anderen Zusammenhängen nutzbringend anwenden kann!) braucht man für den Beweis den **Eulerschen Polyedersatz**, der (wieder in der Sprache der Graphentheorie) so lautet:

[1]Quelle: `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1680050`.

> Für jeden zusammenhängenden planaren Graphen mit v Knoten und e Kanten, der so in die Ebene eingebettet ist, dass f Flächen entstehen, gilt
>
> $$v - e + f = 2.$$

(Eine — gerade für Lehrer — sehr anregende Behandlung des Eulerschen Polyedersatzes bietet übrigens das Buch „Proofs and Refutations“ [3] von Imre Lakatos.)

Literatur

[1] Fulmek, M.: *Skriptum zur Vorlesung „Diskrete Mathematik“*.

[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/Five_color_theorem`

[3] Lakatos, I.: *Beweise und Widerlegungen*. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsges.m.b.H., 1979.