CHAOTISCHE DYNAMISCHE SYSTEME

GERNOT GRESCHONIG

Zur Einleitung befassen wir uns mit der Entwicklung des Begriffs „Chaos“ seit Henri Poincare und geben wir einen Überblick auf verschiedene allgemein bekannte Phänomene und Beispiele wie den Schmetterlingseffekt beim Wetter, das magnetische Pendel, die logistische Gleichung, den Lorenz-Attraktor et cetera. Diesen Systemen gemein ist die Unvorhersehbarkeit des Langzeitverhaltens eines an sich deterministischen Systems aufgrund der Nicht-Reproduzierbarkeit der *exakten* Ausgangsbedingungen.

Nach diesem allgemeinen Überblick wollen wir uns zwei konkreten Systemen mit chaotischem Verhalten zuwenden - der logistischen Gleichung und der Bernoulli-Abbildung. Beide Systeme werden durch eine Funktion vom Einheitsintervall in das Einheitsintervall beschrieben.

Die logistische Gleichung beschreibt die Größe einer sich vermehrenden Population bei beschränktem Nahrungsangebot, das Verhalten des Systems hängt von der Wahl eines Parameters im Bereich zwischen 0 und 4 ab. Wir wollen das Verhalten des Systems für verschieden Werte des Parameters numerisch studieren. Bei einem Parameter kleiner als 1 stirbt die Population sicher aus, bei einem Parameter zwischen 1 und 3 nähert sich die Population in verschiedener Weise einem Grenzwert und bei einem Parameter ab ca. 3,6 beginnt das chaotische Verhalten.

Danach studieren wir die Bernoulli-Abbildung, das ist die Multiplikation mit 2 modulo 1 auf dem Einheitsintervall. Wir erkennen den Zusammenhang der Bernoulli-Abbildung mit der Binärdarstellung der reellen Zahlen und können an ihr die wesentlichen Bedingungen für chaotisches Verhalten verifizieren: es viele periodische Punkte und es gibt Punkte, deren Orbit jedem anderen Punkt beliebig nahe kommt.

Literatur

[1] Devaney, R.L.: *Chaos, Fractals, and Dynamics*, Addison-Wesley, Menlo Park, Calif., 1990.