PARADOXIEN DES UNENDLICHEN

HARALD GROBNER

> „Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das *Gemüt* der Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere *Idee* auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer *Begriff* so der *Aufklärung* bedürftig. (David Hilbert)"

Es liegt im ureigenen Wesen der Mathematik, dass sie sich als die *Wissenschaft vom Unendlichen* charakterisieren ließe. Tatsächlich kennt nur die Mathematik, eine präzise Definition von Unendlichkeit: Eine Menge M heißt *unendlich*, wenn es eine echte Teilmenge $N \subset M$ gibt, die zu M in einer bijektiven Beziehung steht.

Dieses abstrakte Wort wird anschaulich, wenn wir uns in *Hilberts Hotel* einfinden: Man denke sich ein Hotel, das zu jeder natürlichen Zahl n ein Zimmer mit Zimmernummer n besitzt. Man denke sich weiters, dass alle Zimmer unseres Hotels schon belegt seien. Nun komme aber ein weiterer Gast an und er frage an der Rezeption, ob denn noch ein Zimmer zu haben sei. Obwohl alle Zimmer belegt sind, muss der freundliche Rezeptionist unseren neuen Gast allerdings nicht abweisen: Er bitte einfach jeden Gast ins Zimmer mit der um eins höheren Zimmernummer zu wechseln, und schon wird Zimmer 1 frei ohne, dass einer unserer schon anwesenden Gäste das Hotel verlassen muss: Kurz und knapp, $n \mapsto n+1$ ist eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf seine echte Teilmenge $\mathbb{N} \setminus \{1\}$!

Aber das ist erst der Anfang. Nun denke man sich einen Bus voll mit Reisenden, so voll, dass auch in unserem Bus zu jeder natürlichen Zahl ein(e) Busreisende(r) säße. Es komme also nicht bloß *ein* neuer Gast an, sondern *so viele, wie das Hotel überhaupt Zimmer besitzt.* Wieder schafft es unser Hotel, diesmal unter der Leitung einer freundlichen Rezeptionistin, *allen Neuankömmlingen* ein Zimmer zu geben, ohne bereits anwesende Gäste zur Abreise zu bewegen... ***Wie?***

Bedeutsam ist in diesem Beispiel gleich zweierlei. Erstens, dass jedes Zimmer durch eine natürliche Zahl beschriftet war: Wir haben daher in unserem Beispiel die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ im Sinne unserer exakten Definition von Unendlichkeit als unendlich erkannt, ja man möchte sagen, geradezu als einen Prototyp einer unendlichen Menge durchschaut. Zweitens, dass man die natürlichen Zahlen, so wie unsere Hotelzimmer, *abzählen* kann: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...$ Man sagt, $\mathbb{N}$ ist *abzählbar unendlich.*

Es stellt sich sofort die brennende Frage, gibt es denn noch andere „Arten“ von unendlichen Mengen, also Mengen M, die „*echt größer*“ als $\mathbb{N}$ sind. Klar, möchte man meinen, die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen (also Bruch-)Zahlen sei bedeutend größer, da ja sogar zwischen je zwei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen n und $n+1$ bereits unendlich viele Brüche liegen! Aber diese intuitive Annahme ist irrig. Tatsächlich sind $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ in Bijektion zu einander, oder, in anschaulicheren Worten: Obwohl das erschütternde Faktum gilt, dass zwischen je zwei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen n und $n+1$ unendlich viele Brüche liegen, gibt es dennoch eine Methode *alle* Brüche (= alle rationalen Zahlen) *abzuzählen*, also eine Bijektion zu $\mathbb{N}$ anzugeben! ***Wie?***

Der abenteuerliche Leser, welche auf der Suche nach „*echt größeren*“ (als $\mathbb{N}$) unendlichen Mengen M ist, möge durch dieses (Negativ-)Beispiel aber nicht verfrüht die Flinte ins Korn werfen, sondern seinen Cantor aus dem Regal nehmen und das gleichnamige *Cantorsche Diagonalverfahren* nachschlagen, um schließlich zu erkennen: *Die Menge* $\mathbb{R}$ *der reellen Zahlen ist echt größer als* $\mathbb{N}$. Mit anderen Worten, es kann kein wie auch immer angelegtes Verfahren geben, das alle reellen Zahlen abzählt, sozusagen „in einer Liste aufreiht“. Man sagt daher $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar*. Mächtiger als $\mathbb{N}$ (in Zeichen: $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$). ***Wie aber so etwas rigoros beweisen?***

Nachdem wir nun eine unendliche Menge von größerer Mächtigkeit als $\mathbb{N}$ gefunden haben, wir also eine überabzählbare Menge entdeckt haben (nämlich $\mathbb{R}$), stellen sich sofort zwei weitere Fragen:

(i) ***Lässt sich unsere Reihe*** $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$ ***immer mächtiger werdender unendlicher Mengen beliebig fortsetzen?***
Also, gibt es eine Folge von unendlichen Mengen (M_n) so dass

$$M_1 \prec M_2 \prec M_3 \prec M_4 \prec ...$$

Mit einem Wort, das das Tatsächliche recht gut bezeichnet, wenn es auch etwas altmodisch ist: Gibt es unendlich viele, immer stärker werdenen Arten von Unendlichkeit? Geht immer noch etwas „mehr/unendlicher“? Die erstaunliche Antwort ist: Ja! Aber wie? Beweis?

(ii) ***Gibt es eine Stufe von Unendlichkeit zwischen der Abzählbarkeit von*** $\mathbb{N}$ ***und der Überabzählbarkeit von*** $\mathbb{R}$***?***
Anders gesagt, gegeben sei eine unendliche Teilmenge M von $\mathbb{R}$. Ist dann M zwangsweise entweder so mächtig wie $\mathbb{N}$ (also abzählbar) oder schon so mächtig wie ganz $\mathbb{R}$? (also auf dieselbe Art überabzählbar wie $\mathbb{R}$)?
Es ist nicht übertrieben zu sagen, dass dieses als die *Kontinuumshypothese* in die Geistesgeschichte eingegangene Problem, zum Faszinierendsten gehört, was sich der menschliche Geist je selbst zur Frage gestellt hat. Seit 1966 und nach zwei bahnbrechenden Arbeiten zur Logik von K. Gödel und P. Cohen wissen wir, dass diese Frage *unlösbar* ist! Gödel und Cohen bewiesen, dass es keinen Beweis

geben kann, der die einfache Frage, ob es zwischen der Abzählbarkeit von $\mathbb{N}$ und der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ noch eine Stufe von Unendlichkeit gibt, einem schlichten Ja oder einem Nein zuführt. Der Mensch ist hier also absolut frei, sich für die eine oder die andere Antwort zu entscheiden, oder wie es Kafka gesagt hätte: *Du aber sitzt an deinem Fenster und erträumst sie dir, wenn der Abend kommt.*

In Ihrer Seminarsarbeit lösen Sie (zumindest einige der lösbaren) dick-kursiv gestellten Fragen und nehmen zur Unlösbarkeit der Kontinuumshypothese Stellung. Die Literatur zum Thema ist so mannigfaltig, dass ich mir nicht anmaße eine Auswahl anzugeben, sondern auf Ihr Talent vertraue, selbstständig und erfolgreich eine Recherche durchzuführen.

Literatur

[1] Goldstern, M.: *Mengenlehre: Hierarchie der Unendlichkeiten.* `http://info.tuwien.ac.at/goldstern/papers/didaktik.pdf`

[2] Halmos, P.: *Naive Mengenlehre*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.