KOMPETENZHEFT ZU GRENZWERTEN

1. Aufgabenstellungen

Aufgabe 1.1. Gegeben ist die Menge M aller reellen Zahlen x, die $|x-3| < 2$ erfüllen.
Mathematisch kurz: $M = \{x \in \mathbb{R} : |x-3| < 2\}$

a) Wähle einen geeigneten Ausschnitt der Zahlengerade und stelle die Menge M dar:

b) Schreibe M als Intervall an.

Aufgabe 1.2. Gegeben ist die Menge $M = \{x \in \mathbb{R} : |x+2| < 1{,}5\}$.

a) Wähle einen geeigneten Ausschnitt der Zahlengerade und stelle die Menge M dar:

b) Schreibe M als Intervall an.

Aufgabe 1.3. Gegeben ist die Folge $a_n = 3 - \dfrac{100}{n}$.

a) Bestimme den Grenzwert der Folge mit den Grenzwertsätzen.
b) Berechne, ab welchem Folgenglied alle weiteren Folgenglieder weniger als
1) $\varepsilon = 1$ **2)** $\varepsilon = 0{,}1$ **3)** $\varepsilon = 0{,}01$
vom Grenzwert entfernt sind.

Aufgabe 1.4. Gegeben ist die Folge $a_n = \dfrac{42}{n^3} - 12$.

a) Bestimme den Grenzwert der Folge mit den Grenzwertsätzen.
b) Berechne, ab welchem Folgenglied alle weiteren Folgenglieder in der ε-Umgebung des Grenzwerts mit $\varepsilon = 0{,}001$ liegen.

Aufgabe 1.5. Gegeben ist die Folge $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2} + 5$.

a) Begründe, warum die Folge weder monoton wachsend noch monoton fallend ist.
b) Berechne, ab welchem Folgenglied alle weiteren Folgenglieder weniger als $\varepsilon = \frac{1}{100}$ vom Grenzwert 5 entfernt liegen.

Datum: 3. Februar 2017.

Aufgabe 1.6. Verwende die Grenzwertsätze, um den Grenzwert der gegebenen Folgen zu bestimmen:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{42}{n^2} =$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(3 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}\right) =$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^3}} =$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3 \cdot n^3 + n^2 - n}{2 \cdot n^3 - 1} =$

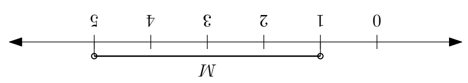
e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3 \cdot n^3 + n^2 - n}{2 \cdot n^4 - 1} =$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n^5 + 2}{4 \cdot n^5 - n^3 + 1}} =$

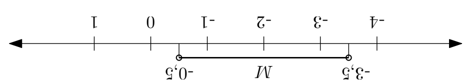
Aufgabe 1.7. Gegeben ist die Folge $a_n = 1{,}01^n$.

a) Berechne, ab welchem Folgenglied alle weiteren Folgenglieder größer als $M = 1\,000\,000$ sind.

b) Begründe, warum die Folge jede noch so große Schranke M ab einem gewissen Folgenglied für immer überschreitet.

1.1 a) 

b) $M =]1; 5[$

1.2 a) 

b) $M =]-3{,}5; -0{,}5[$

1.3 a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ **b) 1)** Ab dem 101.Folgenglied. **2)** Ab dem 1001.Folgenglied. **3)** Ab dem 10 001.Folgenglied.

1.4 a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -12$ **b)** Ab dem 35.Folgenglied.

1.5 a) Wenn n gerade ist, dann ist $a_n > 5$. Wenn n ungerade ist, dann ist $a_n < 5$. Die Folgenglieder werden also immer abwechselnd größer und wieder kleiner.
b) Ab dem 11.Folgenglied.

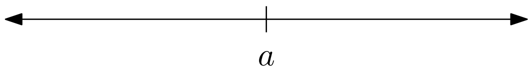
1.6 a) 0 **b)** 3 **c)** $\frac{3}{2}$ **d)** $\frac{3}{2}$ **e)** 0 **f)** $\frac{1}{2}$

1.7 a) Ab dem 1389.Folgenglied. **b)** Wenn $n > \frac{\log(M)}{\log(1{,}01)}$ ist, dann ist $a_n > M$.

2. Grenzwertrechnung

2.1. **Eine Party auf der Zahlengerade — der Grenzwertbegriff.** Wir lernen den illustren Verband der konvergenten Folgen kennen.

Wähle eine reelle Zahl a. Wir stellen a als einen Punkt auf der Zahlengerade dar:



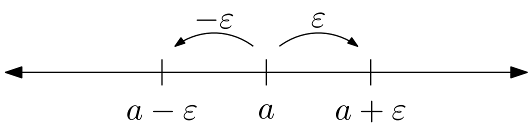
Tatsächlich ist der Punkt a eben erst in diese Gegend gezogen. Er ist sehr umgänglich und möchte unbedingt Kontakt zu anderen Punkten aufbauen, aber nur wenn sie in seiner Umgebung, also in derselben besseren Gegend wohnen. Er ist ehrlich gesagt ein wenig snobistisch.

Sei also $\varepsilon > 0$ eine kleine, positive Zahl. Wir denken zunächst an so etwas wie $1/10$.

Der Punkt a schickt Freundschaftsanfragen an *alle* Punkte, für die gilt:

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon.$$

Siehst du, wie der soziale Kreis, den sich a auf der Zahlengerade für sich ausmalt, aussieht?



Es handelt sich genau um das Intervall

$$]a - \varepsilon, a + \varepsilon[.$$

Wir können diese Umgebung auch durch Distanzen beschreiben:

$$\{\text{reelle Zahlen, deren Distanz von } a \text{ kleiner ist als } \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}.$$

Kannst du das im obigen Bild erkennen?

Beschreibe in Worten und im Bild, wie sich die Umgebungen verändern, wenn $\varepsilon > 0$ kleiner wird.

Eigentlich ist eine Umgebung eines Punkts *irgendein* offenes Intervall, das den Punkt enthält. Zum Beispiel ist $]0; 10[$ eine Umgebung von π.

Auf einer Party auf der Zahlengerade treffen wir eine unendliche Folge $\langle a_n \rangle$ reeller Zahlen. Es ist tatsächlich ziemlich voll hier. Wir hören, wie sich Leute leise zuflüstern: „Diese Folge hat den Grenzwert a."

Nur, was soll das überhaupt bedeuten? Es stellt sich heraus, dass es sich um eine gewagte Aussage über die Beziehung der unendlichen Folge von Zahlen $\langle a_n \rangle$ zur Zahl a handelt. Sie meinen nämlich:

„Egal wie klein $\varepsilon > 0$ auch ist, nur *endlich* viele Folgenglieder liegen *nicht* in $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$."

Die etwas gesprächigeren Gäste formulieren das so:

„Egal wie erlesen a seine Umgebung wählt, es gibt ein Folgenglied, von dem an dann alle weiteren Folgenglieder in besagter Umgebung von a zuhause sind. Schlussendlich sind sie alle dort daheim."

Ob a sich das so vorgestellt hat? „Diese Folge hält rein gar nichts von persönlichem Freiraum", hört man a seufzen, das Schnoferl ganz verzogen. „Vielleicht kann man es mit der Popularität ja tatsächlich übertreiben."

Die MathematikerInnen — bekanntlich stets das Herz *jeder* Party — bestehen auf einer chirurgisch präzisen Formulierung des Umstands:

Wir sagen, die unendliche Folge $\langle a_n \rangle$ ist **konvergent** mit **Grenzwert** a und schreiben dann auch gerne

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $n(\varepsilon) \geq 1$ existiert, sodass

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \qquad \text{für alle} \qquad n \geq n(\varepsilon).$$

Ist dabei $a = 0$, so sagt man, $\langle a_n \rangle$ sei eine **Nullfolge**.

Eine unendliche Folge, die keinen Grenzwert hat, nennt man auch gerne **divergent**.

Einmal warm geredet weisen die MathematikerInnen auch gleich darauf hin, dass die Entwicklung dieses Begriffs Jahrtausende gebraucht hat. Er sei *keinesfalls offensichtlich*. Wenn der grundbrillante Archimedes auch nur einen flüchtigen Blick darauf hätte werfen dürfen, man kann sich gar nicht ausmalen, was er außer *Eureka* und *Das hatte ich die ganze Zeit im Kopf, aber ich konnte es einfach nicht festnageln* noch alles ausgerufen hätte.

Das Wort Konvergenz stammt übrigens aus dem Lateinischen und bedeutet *sich zueinander neigen*, wie etwa in: „Es sieht so aus, als würden unsere Ansichten doch noch konvergieren." Eine gute Wahl.

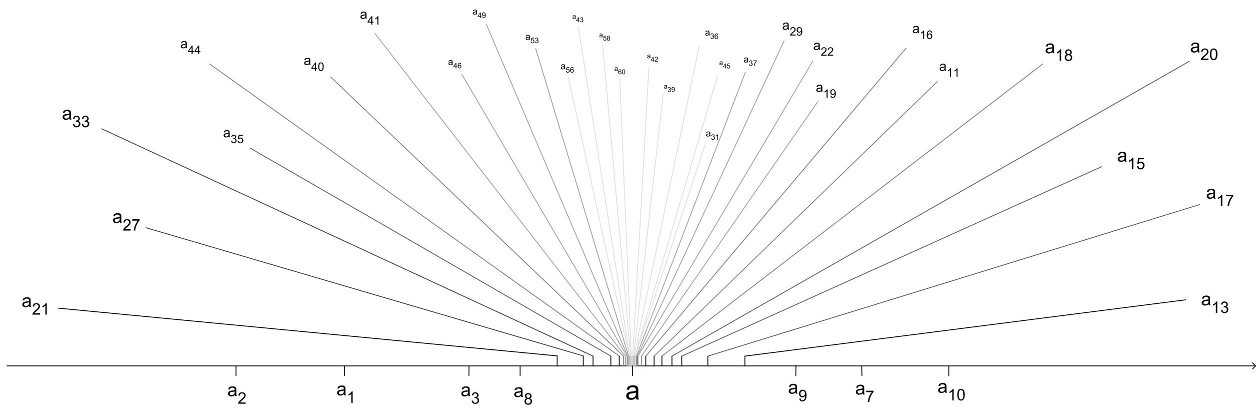


Abbildung 1. Alles drängt sich um a.

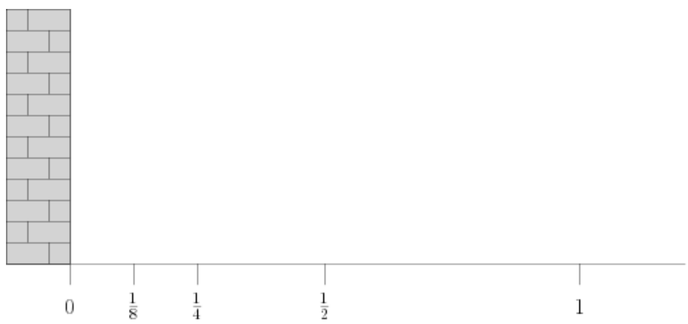
Weil es später noch nützlich sein wird, erwähnen wir hier noch, dass die Bedingung $a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$ auch ausgedrückt werden kann als

$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \qquad \text{oder einfach als} \qquad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Wie man es dreht und wendet, die Bedingung fordert, dass a_n nicht weiter als $\varepsilon > 0$ von a entfernt ist.

2.2. **Beispiele und elementare Eigenschaften konvergenter Folgen.** Du solltest dir das folgende Beispiel gut einprägen. Es ist äußerst lehrreich.

Stelle dich einen Meter vor eine Wand.
Mach einen Schritt von einem halben Meter auf die Wand zu.
Mach einen weiteren Schritt von einem viertel Meter.
Mach einen weiteren Schritt von einem achtel Meter.
Und so weiter.



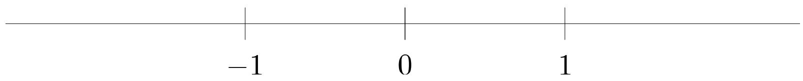
Mit jedem Schritt halbierst du die Distanz zur Wand, die du noch hast.
Erzähle die Geschichte von

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

wobei $a = 0$ und a_n dein Abstand von der Wand vor dem n-ten Schritt ist.
Läufst du dabei jemals gegen die Wand?

Such dir irgendeine Zahl a aus. Erkläre, weshalb die unendliche, konstante Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = a$ den Grenzwert a hat.

Erkläre, warum der Grenzwert der unendlichen Folge $\langle (-1)^n \rangle$ weder -1 noch 1 ist.



Hat die Folge einen Grenzwert?

Tipp: Stell dir Umgebungen von -1 und von 1 vor, die keine Punkte gemeinsam haben. Es brauchen keine besonders erlesenen Umgebungen zu sein.

Ich habe eine konvergente Folge. Sie ist mein ganzer Stolz. Ich verrate hier nur so viel: alle Glieder meiner Folge sind nicht-negativ.

Erkläre anhand von Bildern und Umgebungen, weshalb der Grenzwert meiner Folge nicht -1 sein kann. Besser noch, erkläre, warum der Grenzwert meiner Folge bestimmt nicht negativ ist.

Von einer ganz bestimmten unendlichen Folge $\langle a_n \rangle$ weiß man, dass sie konvergent ist.
Die eine sagt, dass der Grenzwert e ist.

Der andere behauptet, der Grenzwert sei π.

Erkläre anhand von Bildern und Umgebungen, weshalb nicht *beide* recht haben können.

Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.

Eine unendliche **Teilfolge** einer unendlichen Folge erhält man durch das Löschen von Gliedern.

Zum Beispiel ist die unendliche Folge

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{8} \quad \dots$$

diejenige Teilfolge von

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \dots$$

die man erhält, indem man jedes zweite Glied löscht, beginnend mit dem ersten:

$$\cancel{1} \quad \frac{1}{2} \quad \cancel{\frac{1}{3}} \quad \frac{1}{4} \quad \cancel{\frac{1}{5}} \quad \frac{1}{6} \quad \dots$$

Angenommen wir haben eine unendliche Folge $\langle a_n \rangle$ mit Grenzwert a.

Erkläre, warum dann auch jede unendliche Teilfolge den Grenzwert a besitzt.

Gegeben ist eine unendliche Folge $\langle a_n \rangle$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

Erkläre, weshalb schließlich, d.h. von einem bestimmten Glied der Folge an,

$$a_n \in \,]1;3[\,.$$

Nun nimm an, dass $\langle b_n \rangle$ eine unendliche Folge mit $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ist, wobei $b > 0$. Erkläre, weshalb schließlich

$$\frac{1}{2} \cdot b < b_n < \frac{3}{2} \cdot b.$$

Stimmt es, dass

(1)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

gilt? Erkläre in Worten und Bildern, was das bedeutet.
Um eine kritisch denkende Person von (1) zu überzeugen, müssen wir erklären, wie wir, gegeben irgendeinen *Input* $\varepsilon > 0$, eine natürliche Zahl $n(\varepsilon) \geq 1$ als *Output* finden können, sodass

(2)
$$-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \text{für alle} \qquad n \geq n(\varepsilon).$$

Notieren wir mal ein paar vorläufige Überlegungen dazu.

Fixiere $\varepsilon > 0$. Für welche natürliche Zahlen $n \geq 1$ haben wir eigentlich

$$-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon?$$

Nun, die Ungleichung $-\varepsilon < 1/n$ gilt ja sogar für alle $n \geq 1$. Die Ungleichung $1/n < \varepsilon$ ist äquivalent zu

(3)
$$\frac{1}{\varepsilon} < n.$$

Außerdem sehen wir schon mal, dass wenn (3) für ein $n \geq 1$ gilt, dann auch gleich für alle größeren natürlichen Zahlen.

Das bringt uns auf ein Rezept für die Berechnung von $n(\varepsilon)$:
Wir runden $1/\varepsilon$ auf zur nächstgrößeren natürlichen Zahl und addieren obendrein gleich noch Eins dazu. Nenne die so berechnete natürliche Zahl $n(\varepsilon)$. Erkläre, weshalb $1/\varepsilon < n(\varepsilon)$ und warum mit $n(\varepsilon)$ die gewünschte Ungleichung (2) klappt.

Es sieht momentan so aus, als ob bereits der Nachweis einer so netten und einfach aussehenden Aussage wie (1) ziemliche Mühe macht. Aber diese Mühe zahlt sich aus — jetzt, wo wir *wissen*, dass $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, tun sich eine ganze Reihe von ungeahnten Möglichkeiten auf.

Erkläre, weshalb die unendliche Folge

$$1 \qquad \frac{1}{10} \qquad \frac{1}{100} \qquad \frac{1}{1000} \qquad \dots$$

den Grenzwert 0 hat. Inzwischen haben wir viele verschiedene Möglichkeiten, dies zu begründen.

Die Dezimalentwicklung der Fläche eines Kreises vom Radius 1 ist gegeben durch

$$\pi = 3{,}141\,592\,653\,5\ldots$$

Um diese Zahl *exakt* anzugeben brauchen wir eigentlich alle Stellen nach dem Dezimalpunkt. Diese Entwicklung geht immer weiter, ohne jemals periodisch zu werden. Schließlich ist π ja irrational.

Betrachten wir die Zahlen

$$a_1 = 3{,}1 \qquad a_2 = 3{,}14 \qquad a_3 = 3{,}141 \qquad a_4 = 3{,}1415 \qquad \ldots \qquad a_7 = 3{,}141\,592\,6 \qquad \ldots$$

Wir erhalten a_n durch *Abschneiden* der Dezimalentwicklung von π nach der n-ten Stelle rechts vom Dezimalpunkt.

Wie stellen wir a_3 auf der Zahlengerade dar? Eine gute Möglichkeit, sich eine Vorstellung zu machen, ist die folgende. Zunächst ist

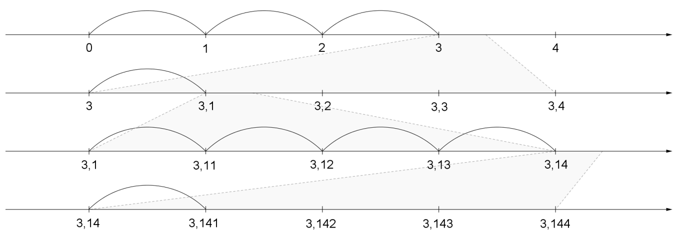
$$a_3 = 3{,}141 = 3 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100} + 1 \cdot \frac{1}{1000}.$$

Ausgehend von Null machen wir zuerst drei Schritte nach rechts. Dann setzen wir so fort:

(i) 1 zehntel Schritt nach rechts, dann

(ii) 4 hunderstel Schritt nach rechts, dann

(iii) 1 tausendstel Schritt nach rechts.



... und schon sind wir da.

Erkläre, warum die Zahlen a_n größer werden, d.h. weshalb wir uns auf der Zahlengerade nach rechts bewegen. Symbolisch, $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \geq 1$.

Erkläre, warum a_n eine rationale Zahl ist. Was sind überhaupt rationale Zahlen?

Erkläre, weshalb $a_4 = 3{,}1415 \leq \pi \leq 3{,}1416$ und $a_7 = 3{,}141\,592\,6 \leq \pi \leq 3{,}141\,592\,7$. Allgemeiner,

$$a_n \leq \pi \leq a_n + 10^{-n}.$$

Erkläre, weshalb

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pi.$$

Jede reelle Zahl hat eine Dezimalentwicklung. Wenn du obige Überlegungen verwendest, kannst du dann (in Worten) erklären, wie man jede reelle Zahl durch eine aufsteigende Folge rationaler Zahlen erhalten kann?

2.3. **Erzeugung neuer konvergenter Folgen.** Die folgenden Regeln erklären, wie wir Folgen, von denen wir schon wissen, dass sie konvergieren, zu neuen konvergenten Folgen kombinieren können. Dann geben wir einige Beispiele an um zu illustrieren, warum diese Regeln für uns so nützlich sind.

Nimm an, dass wir *bereits wissen* dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Daraus können wir das Folgende schließen:

(4) $$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b,$$

ebenso wie

(5) $$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b.$$

Nun nimm an, dass $b \neq 0$ und dass $b_n \neq 0$ für alle $n \geq 1$. Dann gilt

(6) $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Ist c irgendeine Zahl, dann gilt

(7) $$\lim_{n\to\infty}(c + a_n) = c + a \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot a.$$

Nimm nun an, dass $a_n \geq 0$ für alle $n \geq 1$. Dann ist $a \geq 0$ und

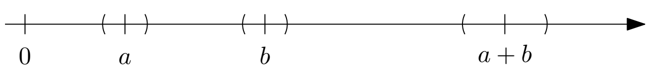
(8) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}.$$

Analog gilt

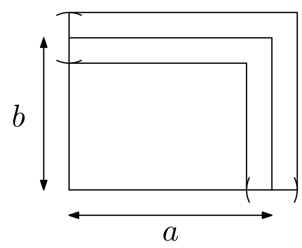
(9) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{a_n} = \sqrt[3]{a} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{a_n} = \sqrt[4]{a} \qquad \ldots.$$

Kannst du anhand der Zeichnungen eine intuitive Erklärung für die beiden Regeln finden?

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$$



$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$



Diese Regeln kann man sich einfacher in folgender Form merken:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) + (\lim_{n\to\infty} b_n)$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) - (\lim_{n\to\infty} b_n)$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n)$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

d.h. Grenzwerte vertauschen mit den Grundrechnungsarten plus, minus, mal, und dividiert durch.

Weiters gilt:

$$\lim_{n\to\infty}(c\cdot a_n) = c\cdot \lim_{n\to\infty} a_n$$
$$\lim_{n\to\infty}(c+a_n) = c+ \lim_{n\to\infty} a_n$$
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}.$$

Vergiss nicht, dass diese Regeln für konvergente Folgen nur unter bestimmten Voraussetzungen gelten. Diese Voraussetzungen kann man sich sehr einfach merken: wir müssen bereits wissen, dass die Grenzwerte auf der rechten Seite existieren, und wir dürfen *nirgends* durch Null dividieren, ebensowenig wie wir Quadratwurzeln aus negativen Zahlen ziehen dürfen.

Erkläre aussschließlich unter Verwendung von $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ und der obigen Regeln, weshalb

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Das folgende Beispiel ist etwas ausgefeilter:

Erkläre, welche Regeln genau in jedem der folgenden Schritte verwendet werden. Werden die Regeln korrekt angewendet?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)=0\cdot 0=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=1+\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right)=1+0=1$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)&=3+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\\&=3+\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)+\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right)=3+0+0=3\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{3}{1}=3.$$

Nun ist

$$\frac{3\cdot n^2+n+1}{n^2+1}=\frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}\tag{10}$$

also

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot n^2+n+1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim_{n\to\infty}(3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})}=3.$$

Grenzwerte von Quotienten kommen recht häufig vor. In diesem Zusammenhang ist das Herausheben der höchsten Potenzen aus Zähler und Nenner, wie wir es in (10) gemacht haben, stets eine gute Idee.

Erkläre das folgende, weniger genau ausgeführte Beispiel.

Es gilt

$$\frac{n+5}{n^3+2n}=\frac{n}{n^3}\cdot\frac{1+\frac{5}{n}}{1+\frac{2}{n^2}},$$

woraus folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+5}{n^3+2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^3}\cdot\frac{1+\frac{5}{n}}{1+\frac{2}{n^2}}\right)=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right)\cdot\frac{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{5}{n})}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n^2})}=0\cdot 1=0.$$

Beachte, dass du, um zu begründen, dass alle Regeln korrekt angewendet wurden, von rechts nach links überprüfst.

Den folgenden Trick, der auf der binomialen Identität

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

beruht, solltest du dir — nicht nur für das folgende Beispiel — gut einprägen.

Es gilt

$$\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \sqrt{n}\cdot\frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n}\cdot\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1},$$

sodass

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\sqrt{\lim_{n\to\infty}(1+1/n)}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Beispiel 2.1. Sei $a_n = (3\cdot n+2)/(n+1)$. Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$ und bestimme eine Stelle in der Folge, von der an

$$3-\varepsilon < \frac{3\cdot n+2}{n+1} < 3+\varepsilon$$

gilt, wobei $\varepsilon = 0{,}03$.

Lösung. Zunächst sehen wir, dass

$$\frac{3\cdot n+2}{n+1} = \frac{n}{n}\cdot\frac{3+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}.$$

Nun ist

$$\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right) = 3 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1,$$

sodass also tatsächlich

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot n+2}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{3}{1} = 3.$$

Die Ungleichungen sind äquivalent zu

$$-\varepsilon < \underbrace{\frac{3\cdot n+2}{n+1}-3}_{=-\frac{1}{n+1}} < \varepsilon.$$

Die zweite Ungleichung ist für alle $n \geq 1$ erfüllt (denke an die Vorzeichen). Bezüglich der zweiten Ungleichung gilt

$$-\varepsilon < -\frac{1}{n+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{n+1} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{\varepsilon} < n+1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{\varepsilon}-1 < n.$$

Ist $\varepsilon = 0{,}03$, dann ist $1/\varepsilon - 1 = 32{,}\dot{3}$. Wir sehen, dass die erste Ungleichung für $n \geq 33$ erfüllt ist. Das bedeutet also, dass vom 33. Glied an alle Folgenglieder höchstens 0,03 vom Grenzwert 3 entfernt sind. $\square$

2.4. **Die unendliche geometrische Reihe.** Was passiert, wenn wir eine *kleine* Zahl immer wieder mit sich selbst multiplizieren? Was, wenn wir das gleiche mit einer *großen* Zahl tun?

Erkläre, warum die unendliche Folge

$$0{,}1 \qquad 0{,}01 \qquad 0{,}001 \qquad 0{,}0001 \qquad \ldots$$

den Grenzwert 0 hat und warum die unendliche Folge

$$1 \qquad 10 \qquad 100 \qquad 1000 \qquad \ldots$$

keinen Grenzwert hat.

Untersuche die beiden unendlichen Folgen

$$0{,}99 \qquad 0{,}99^2 \qquad 0{,}99^3 \qquad \ldots$$

und

$$1{,}01 \qquad 1{,}01^2 \qquad 1{,}01^3 \qquad \ldots$$

mit deinem Taschenrechner. Was vermutest du über diese beiden Folgen?

Drücke deine Vermutung über die zweite Folge als eine Aussage über Zinsen auf einem Konto aus.

Hier ist noch eine weitere nützliche Tatsache, die wir später verwenden werden:

Sei $q \in \,]-1;1[$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0. \tag{11}$$

Zum Beispiel ist

$$\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0.$$

Erinnere dich, dass

$$\overbrace{(1 + q + q^2 + \ldots + q^n)}^{n+1 \text{ Summanden}} \cdot (1 - q) = 1 - q^{n+1}$$

Nimm nun an, dass $q \in \left]-1; 1\right[$. Setze

$$s_n := 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q} \cdot \lim_{n\to\infty} (1 - q^{n+1}) = \frac{1}{1-q}.$$

Allgemeiner ist, falls $a \in \mathbb{R}$ und $q \in \left]-1; 1\right[$,

$$a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \ldots = a \cdot (1 + q^2 + q^3 + \ldots) = \frac{a}{1-q}.$$

Betrachte die reelle Zahl mit der Dezimalentwicklung

$$x = 4{,}3\overline{12} = 4{,}312\,121\,212\,12\ldots$$

Als nächstes zeige ich dir etwas, das ich in der Schule gelernt habe, als ich zwölf war.

$$\begin{aligned} 10 \cdot x &= 43{,}121212\ldots \\ 1000 \cdot x &= 4312{,}121212\ldots \\ (1000 - 10) \cdot x &= 4312 - 43 = 4269 \\ x &= \frac{4269}{990} = \frac{1423}{330}. \end{aligned}$$

Hier ist noch eine weitere Möglichkeit, dasselbe Problem anzugehen:

$$\begin{aligned} 0{,}0\overline{12} &= 12 \cdot 10^{-3} + 12 \cdot 10^{-5} + 12 \cdot 10^{-7} + \ldots = \frac{12}{1000} \cdot \left(1 + 10^{-2} + 10^{-4} + \ldots\right) \\ &= \frac{12}{1000} \cdot \frac{1}{1 - 10^{-2}} = \frac{12}{1000} \cdot \frac{100}{99} = \frac{12}{990}. \end{aligned}$$

Also ist

$$x = 4{,}3 + 0{,}0\overline{12} = \frac{43}{10} + \frac{12}{990} = \frac{43 \cdot 99 + 12}{990} = \frac{4269}{990} = \frac{1423}{330}.$$

Wie steht es mit $87{,}9\overline{173}$ oder $0{,}\dot{9}$?

2.5. **Beschwerdeabteilung.** In den folgenden Fenstern geschehen Fehler. Die passieren uns nicht!

$$1 = \lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot n\right) = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} n\right) = 0 \cdot \lim_{n\to\infty} n = 0.$$

Wo ist der Fehler passiert?

Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}\right) + \ldots + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2}\right) = 0+0+\ldots+0 = 0$$

wohingegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot(n+1)}{2\cdot n^2} = \frac{1}{2}$$

weil jedes Kind seit C. F. Gauss gehört hat, dass

$$1+2+\ldots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Wo ist also der Fehler passiert?

3. Weitere Aufgaben

Aufgabe 3.1. Verwende die Grenzwertsätze, um den Grenzwert der gegebenen Folgen zu bestimmen:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2\cdot n^2+3\cdot n}{3\cdot n+1} - \frac{4\cdot n^3-1}{6\cdot n^2+n}\right) =$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4+n^3+n^2+n+1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)} =$ Tipp: Denke nach, bevor du entwickelst.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) =$ Tipp: Rationalmachen.

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[5]{1+n^5}} =$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+2^2+\ldots+2^n}{1+3+3^2+\ldots+3^n} =$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^6+2}-\sqrt[3]{n^6+1}\right)\cdot n^4 =$ Tipp: Rationalmachen mit $(a-b)\cdot(a^2+a\cdot b+b^2) = a^3-b^3$.

Aufgabe 3.2. Sei $\langle a_n\rangle$ eine Folge. Wahr oder falsch?

a) Ist $\langle a_n\rangle$ konvergent mit Grenzwert a, so ist die Folge $\langle |a_n|\rangle$ konvergent mit Grenzwert $|a|$.
b) Ist $\langle a_n\rangle$ konvergent, dann ist die Folge $\langle (-1)^n\cdot a_n\rangle$ immer divergent.
c) Ist die Absolutfolge $\langle |a_n|\rangle$ konvergent, so konvergiert auch $\langle a_n\rangle$.

d) Sei a eine rationale Zahl. Es gibt eine Folge irrationaler Zahlen $\langle a_n \rangle$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

e) Sei a eine irrationale Zahl. Es gibt eine Folge rationaler Zahlen $\langle a_n \rangle$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

f) Ist die Folge arithmetisch, also $a_n = a_0 + n \cdot d$, dann ist sie bestimmt divergent.

g) Ist die Folge geometrisch, also $a_n = a_0 \cdot q^n$, und außerdem $a_0 \neq 0$ und $q < -1$, so ist sie sicher divergent.

h) Die Folge $\langle a_n \rangle$ konvergiert genau dann, wenn die verschobene Folge $\langle b_n \rangle$ mit $b_n = a_{n+5}$ konvergiert.

Aufgabe 3.3. Jemand hat eine Folge $\langle a_n \rangle$, von der sie uns Folgendes verrät:

(i) alle Folgenglieder sind positiv;
(ii) es gilt immer $a_{n+1} = a_n/2 + 1/a_n$;
(iii) die Folge ist konvergent.

Was ist der Grenzwert der Folge?

Beachte, dass eine Wahl von $a_1 > 0$ gemeinsam mit der Rekursionsvorschrift (ii) die gesamte Folge bestimmt. Man kann dann zeigen, dass die Folge immer monoton und immer beschränkt ist und somit einen Grenzwert hat.

Aufgabe 3.4. Jemand hat eine Folge $\langle a_n \rangle$, von der er uns Folgendes verrät:

(i) alle Folgenglieder sind positiv;
(ii) es gilt immer $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$;
(iii) die Folge ist konvergent.

Was ist der Grenzwert der Folge?

3.1 a) $\frac{8}{9}$ **b)** 1 **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** 1 **e)** 0 **f)** $\frac{1}{3}$

3.2 a) Wahr **b)** Falsch **c)** Falsch **d)** Wahr **e)** Wahr **f)** Falsch **g)** Wahr **h)** Wahr

3.3 $\sqrt{2}$

3.4 2

Dieses Werk von Mathematik macht Freu(n)de unterliegt einer CC BY-NC-ND 4.0 Lizenz.
http://mathematikmachtfreunde.univie.ac.at