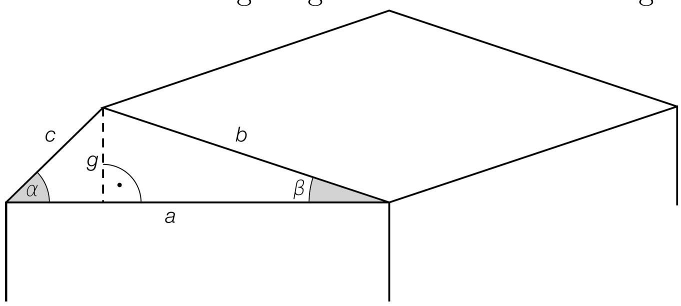
KOMPETENZHEFT ZUR TRIGONOMETRIE, III

1. Aufgabenstellungen

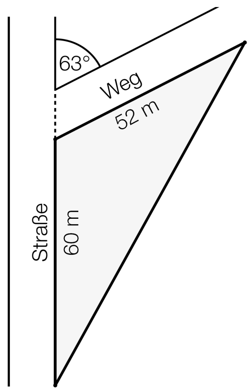
Aufgabe 1.1. Bundesinstitut bifie Zur Schneelastberechnung wird der Neigungswinkel α des in der nachstehenden Abbildung dargestellten Daches benötigt.



Dabei gilt:
$a = 20\,\text{m}$, $b = 16\,\text{m}$ und $c = 7\,\text{m}$

– Ermitteln Sie den Neigungswinkel α.
– Berechnen Sie den Abstand g.

Aufgabe 1.2. Bundesinstitut bifie Ein dreieckiges Grundstück wird an einer Seite von einem Nachbargrundstück begrenzt. An einer Seite grenzt es an eine Straße und an der dritten Seite an einen Weg. Das Grundstück soll vollständig umzäunt werden.



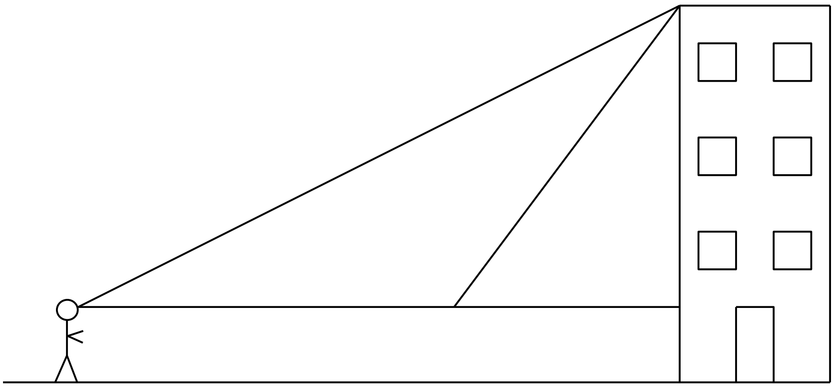
– Berechnen Sie die Länge des benötigen Zauns.

– Zeigen Sie mithilfe der trigonometrischen Flächenformel, dass sich der Flächeninhalt A des Grundstücks vervierfacht, wenn alle Seitenlängen verdoppelt werden.

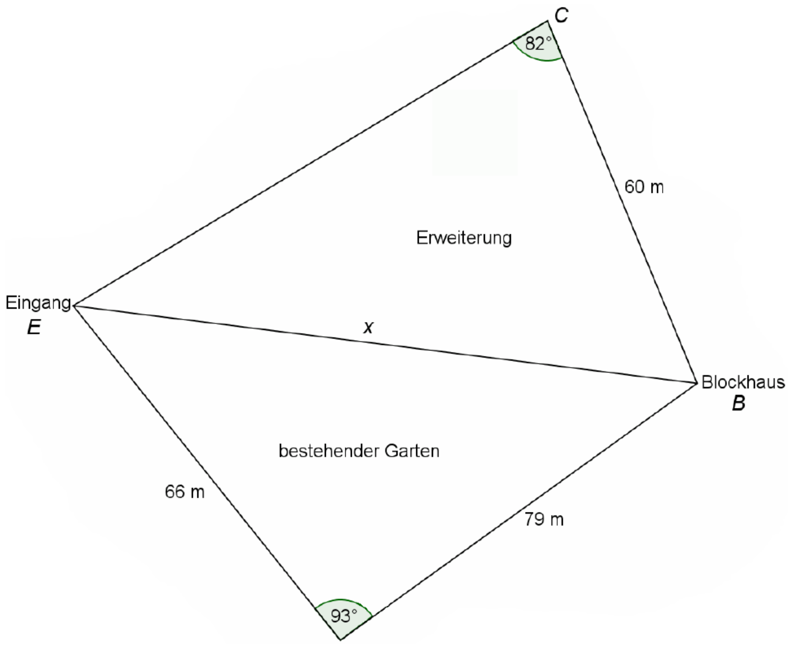
Aufgabe 1.3. Um die Höhe eines Gebäudes zu bestimmen, misst du von deinem Standort den Höhenwinkel $\alpha = 28°$ zum Gebäudedach. Anschließend bewegst du dich um 8 Meter in Richtung des Gebäudes und misst diesmal einen Höhenwinkel von $\beta = 42°$. Beschrifte die Skizze und berechne die

Datum: 3. Februar 2017.

Höhe h des Gebäudes, wenn deine Aughöhe 1,8 m beträgt.



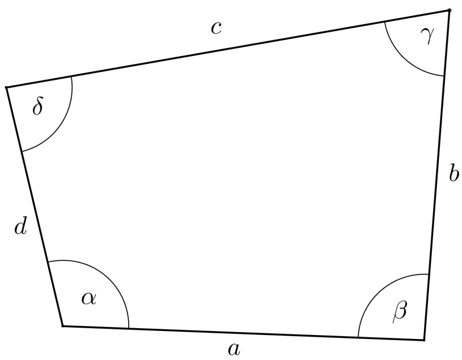
Aufgabe 1.4. Bundesinstitut bifie Der Außenbereich eines Kindergartens wird vergrößert und zu einem Erlebnisgarten umgestaltet.



a) Vom Eingang E zum Blockhaus B soll ein geradliniger Barfußweg angelegt werden. Berechnen Sie die Länge x des Weges in Metern.

b) Dokumentieren Sie, wie Sie den Flächeninhalt der Erweiterung berechnen können, wenn x als bekannt angenommen wird.

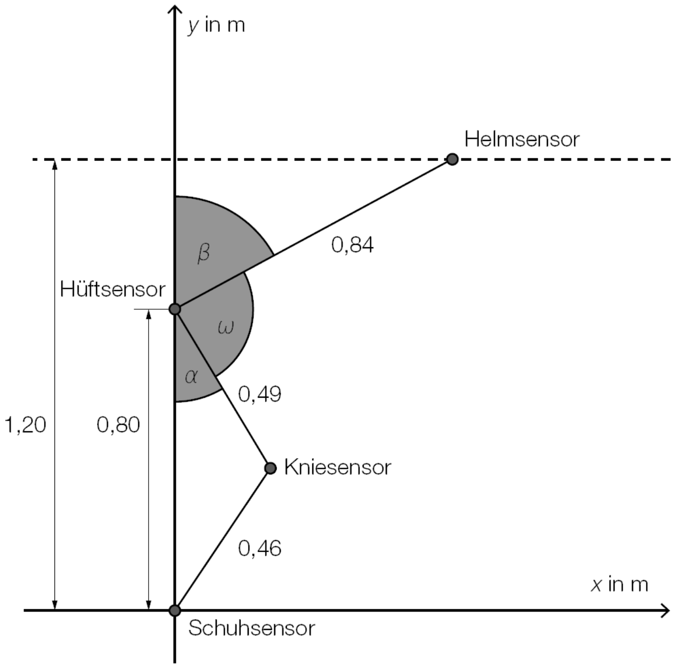
Aufgabe 1.5. Vom dargestellten Viereck sind die Seitenlängen $b = 7{,}7\,\text{cm}$, $c = 10{,}5\,\text{cm}$, $d = 5{,}7\,\text{cm}$ sowie die Winkel $\beta = 92°$ und $\delta = 86°$ bekannt. Berechne den Umfang des Vierecks.



Aufgabe 1.6. Für die Analyse eines Bewegungsablaufs beim Skispringen wurden 4 Sensoren an der Ausrüstung eines Skispringers befestigt.

1. Sensor: Schuh   2. Sensor: Knie   3. Sensor: Hüfte   4. Sensor: Helm

In der nachstehenden Abbildung sind die Positionen der Sensoren für eine Position im Bewegungsablauf des Skispringers in einem Koordinatensystem dargestellt (Angaben in Metern).



Berechnen Sie den Winkel ω.

1.1 $\alpha = 46{,}42\ldots°$, $g = 5{,}071\ldots$ m

1.2 Der Zaun muss rund 207,6 m lang sein. Bei Verdoppelung aller Seitenlängen bleiben die Winkel gleich.

$$A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \sin(\alpha)}{2}, \qquad A_{neu} = \frac{2 \cdot \overline{AB} \cdot 2 \cdot \overline{BC} \cdot \sin(\alpha)}{2} = 4 \cdot A$$

1.3 $h \approx 12{,}19$ m

1.4 a) $x \approx 105{,}56$ m

b) Zuerst die benötigten Winkel im Dreieck EBC berechnen: den Winkel in der Ecke E mit dem Sinussatz, den Winkel in der Ecke B mithilfe der Winkelsumme; anschließend die Strecke $\overline{EC}$ mit dem Sinussatz berechnen; zuletzt den Flächeninhalt mit der trigonometrischen Flächenformel ($\overline{EC}$, $\overline{BC}$, 82°) berechnen.

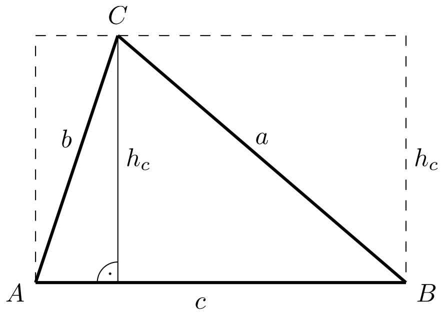
1.5 $u \approx 32{,}30$ cm

1.6 $\omega = 86{,}94\ldots°$

2. Berechnungen im allgemeinen Dreieck

Bisher haben wir Winkelfunktionen ausschließlich in rechtwinkligen Dreiecken betrachtet. Nun erweitern wir den Anwendungsbereich auf beliebige Dreiecke.

Erkläre anhand der nebenstehenden Zeichnung, warum der Flächeninhalt des Dreiecks $\frac{c \cdot h_c}{2}$ beträgt.



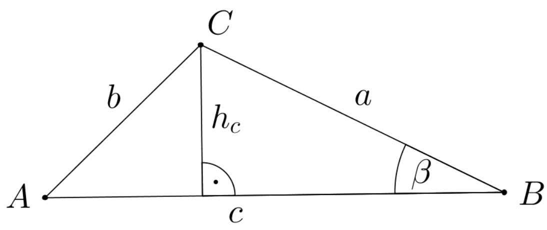
Flächeninhalt eines Dreiecks: $A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$

Als Nächstes starten wir mit einem Dreieck, von dem wir zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel kennen. Wir wollen einen Weg finden, um auch in diesem Fall den Flächeninhalt berechnen zu können:

Aus dem nebenstehenden Dreieck kennst du a, c und β.

i) Erkläre, warum $h_c = a \cdot \sin(\beta)$ gilt.

ii) Erkläre, warum $A = \frac{a \cdot c \cdot \sin(\beta)}{2}$ gilt.

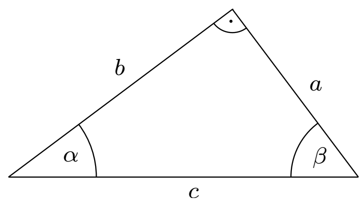


Trigonometrische Flächenformel: $A = \frac{b \cdot c \cdot \sin(\alpha)}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin(\beta)}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\gamma)}{2}$

Von einem allgemeinen Dreieck kennst du zwei Seiten a und b sowie deren gegenüber liegende Winkel α und β. Erkläre, wie du den Flächeninhalt des Dreiecks berechnen kannst.

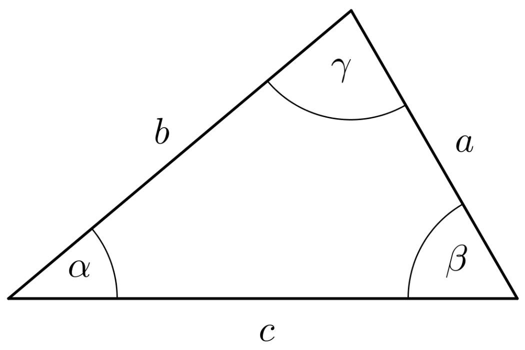
In jedem rechtwinkligen Dreieck mit $\gamma = 90°$ gilt:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$



Es wird also ein Zusammenhang zwischen einem Winkel, seiner gegenüber liegenden Seite und der dem rechten Winkel gegenüber liegenden Seite hergestellt. Tatsächlich gilt in beliebigen Dreiecken ein derartiger Zusammenhang.

Beispiel 2.1. Miss im dargestellten Dreieck die Seitenlängen ab. Berechne mit dem Taschenrechner das Verhältnis von Seitenlänge zu Sinus des gegenüberliegenden Winkels.



$\alpha = 40°$ $a =$ ________ $\dfrac{a}{\sin\alpha} =$ ________

$\beta = 60°$ $b =$ ________ $\dfrac{b}{\sin\beta} =$ ________

$\gamma = 80°$ $c =$ ________ $\dfrac{c}{\sin\gamma} =$ ________

Das ist kein Zufall! In jedem Dreieck gilt der sogenannte Sinussatz.

Sinussatz: $\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)}$

Wir begründen warum der Sinussatz in jedem beliebigen Dreieck gilt:

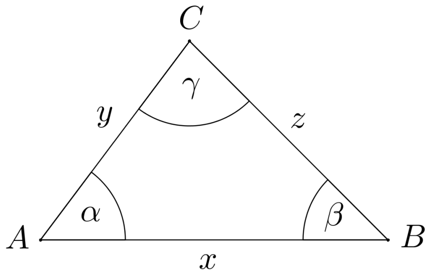
i) Erkläre, warum $\dfrac{b \cdot c \cdot \sin(\alpha)}{2} = \dfrac{a \cdot c \cdot \sin(\beta)}{2}$ gilt.

ii) Erkläre, warum daraus $\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)}$ folgt.

Erkläre, warum der Zusammenhang $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$ im rechtwinkligen Dreieck mit $\gamma = 90°$ ein Spezialfall des Sinussatzes ist.

Kennt man von einem Dreieck alle drei Winkel, aber keine Seitenlänge, ist nur die Form, aber nicht die Größe eindeutig bestimmt (Ähnlichkeit!). Kennt man zwei Winkel und eine Seitenlänge ist das Dreieck eindeutig bestimmt:

Beispiel 2.2. Vom dargestellten Dreieck sind $\alpha = 58°$, $\beta = 37°$ und $x = 7\,\text{cm}$ bekannt. Berechne den Winkel γ, die Seitenlängen y und z sowie den Flächeninhalt A des Dreiecks.



Erkläre zunächst, warum diese Angaben ausreichen, um die Seitenlängen und Winkel des Dreiecks eindeutig festzulegen. Wie würdest du das Dreieck konstruieren?

Lösung. Wir kennen zwei Winkel des Dreiecks, also können wir den dritten Winkel über die Winkelsumme berechnen:

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 85°$$

Mit Hilfe des Sinussatzes können wir die fehlenden Seitenlängen berechnen:

$$\frac{x}{\sin(\gamma)} = \frac{y}{\sin(\beta)} \implies y = \frac{x}{\sin(\gamma)} \cdot \sin(\beta) \approx 4{,}23\,\text{cm}$$
$$\frac{x}{\sin(\gamma)} = \frac{z}{\sin(\alpha)} \implies z = \frac{x}{\sin(\gamma)} \cdot \sin(\alpha) \approx 5{,}96\,\text{cm}$$

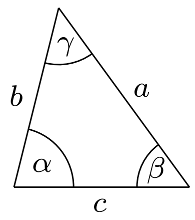
Den Flächeninhalt können wir mit Hilfe der hergeleiteten trigonometrischen Flächenformel berechnen:

$$A = \frac{y \cdot x \cdot \sin(\alpha)}{2} \approx 12{,}55\,\text{cm}^2$$

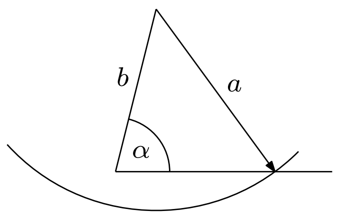
□

Kennt man von einem Dreieck zwei Seitenlängen und jenen Winkel, der der *längeren* Seite gegenüberliegt, ist das Dreieck eindeutig bestimmt:

Beispiel 2.3. Vom dargestellten Dreieck sind $\alpha = 65°$, $a = 7\,\text{cm}$ und $b = 6\,\text{cm}$ bekannt. Berechne die fehlenden Winkel und Seitenlängen des Dreiecks.



Erkläre anhand der Skizze, warum das Dreieck eindeutig festgelegt ist, wenn der gegebene Winkel der *längeren* Seite gegenüberliegt.



Lösung. Wir verwenden den Sinussatz, um β zu berechnen:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$
$$a \cdot \sin(\beta) = b \cdot \sin(\alpha)$$
$$\sin(\beta) = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{a}$$
$$\beta = \arcsin\left(\frac{b \cdot \sin(\alpha)}{a}\right) \approx 50{,}97°$$

Den dritten Winkel erhalten wir aus der Winkelsumme:

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 64{,}03°$$

Die dritte Seitenlänge können wir mit dem Sinussatz berechnen:

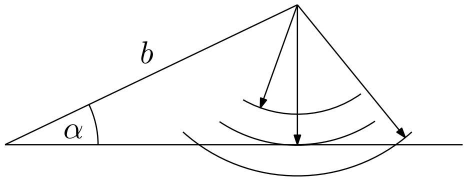
$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{\sin(\alpha)} \implies c = \frac{a}{\sin(\alpha)} \cdot \sin(\gamma) \approx 6{,}94\,\text{cm}$$

□

Kennt man von einem Dreieck zwei Seitenlängen und jenen Winkel, der der *kürzeren* Seite gegenüberliegt, kann es keine, eine oder zwei Lösungen geben:

Beispiel 2.4. Von einem wie in Beispiel 2.3 beschrifteten Dreieck sind $\alpha = 30°$, $b = 8\,\text{cm}$ und
1) $a = 3\,\text{cm}$, **2)** $a = 4\,\text{cm}$, **3)** $a = 5\,\text{cm}$ bekannt. Berechne die fehlenden Winkel.

Erkläre anhand der Skizze, warum es keine, eine oder zwei Lösungen geben kann, wenn der gegebene Winkel der *kürzeren* Seite gegenüberliegt:



Lösung. Wie in Beispiel 2.3 formen wir den Sinussatz auf β um und erhalten:

$$\beta = \arcsin\left(\frac{b \cdot \sin(\alpha)}{a}\right) = \arcsin\left(\frac{4}{a}\right) \tag{1}$$

Da der gegebene Winkel α der kürzeren Seite a gegenüberliegt, hängt die weitere Vorgehensweise von a ab:

1) Versucht man $a = 3\,\text{cm}$ einzusetzen, erhält man $\beta = \arcsin\left(\frac{4}{3}\right)$ und der Taschenrechner gibt einen „DOMAIN Error“ zurück. Es gibt also kein Dreieck mit $\alpha = 30°$, $a = 3\,\text{cm}$ und $b = 8\,\text{cm}$.

Erkläre warum der Taschenrechner bei $\arcsin\left(\frac{4}{3}\right)$ einen „DOMAIN Error“ zurückgibt.
Wie groß muss a mindestens sein, damit $\arcsin\left(\frac{4}{a}\right)$ berechnet werden kann?

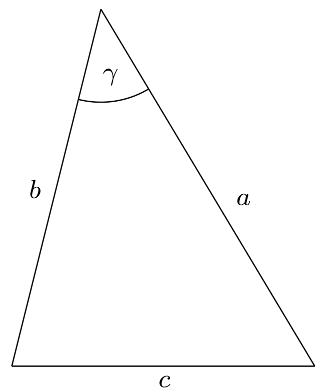
2) Setzen wir $a = 4\,\text{cm}$ in Gleichung (1) ein, erhalten wir $\beta = \arcsin(1) = 90°$, also genau ein rechtwinkliges Dreieck als Lösung. Der dritte Winkel ist $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 60°$.

3) Setzen wir $a = 5\,\text{cm}$ in Gleichung (1) ein, erhalten wir die Lösung $\beta = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) \approx 53{,}13°$ und $\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 96{,}87°$.
Vorsicht! Wie oben überlegt, kann man in diesem Fall zwei verschiedene Dreiecke konstruieren. Wo ist diese zweite Lösung verloren gegangen?
Der Winkel β kann in einem allgemeinen Dreieck zwischen 0° und 180° groß sein. Der Sinussatz

besagt, dass die Gleichung $\beta = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$ bzw. $\sin(\beta) = \frac{4}{5}$ erfüllt sein muss. Der Taschenrechner hat uns eine Lösung $\beta_1 \approx 53{,}13°$ geliefert; es gibt aber noch einen zweiten Winkel zwischen $0°$ und $180°$, der die Gleichung erfüllt:
Wegen $\sin(\beta) = \sin(180° - \beta)$ ist auch $\beta_2 = 180° - \beta_1 \approx 126{,}87°$ eine Lösung. Der zugehörige dritte Winkel ist in diesem Fall $\gamma_2 = 180° - \alpha - \beta_2 \approx 23{,}13°$.

□

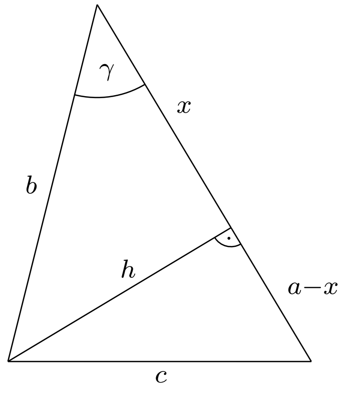
Beispiel 2.5. Im folgenden Dreieck sind die Seiten a und b sowie der *eingeschlossene* Winkel γ bekannt:



Die Länge der Seite c ist zu bestimmen.

i) Erkläre, warum ein Dreieck eindeutig bestimmt ist, wenn man zwei Seitenlängen und den *eingeschlossen* Winkel kennt. Wie würdest du das Dreieck konstruieren?
ii) Erkläre, warum man in diesem Fall weder mit der Winkelsumme noch mit dem Sinussatz unmittelbar weitere Winkel oder Seiten berechnen kann.

Lösung. Stattdessen zerlegen wir mit einer Höhe das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke:



i) Erkläre, warum wir im oberen rechtwinkligen alle Seiten und Winkel berechnen können.
ii) Erkläre, warum $b^2 = x^2 + h^2$ und $c^2 = h^2 + (a - x)^2$ gilt.
iii) Erkläre, wie du daraus die Länge der Seite c berechnen kannst.

Wir setzen diese Schritte zusammen und lösen das allgemeine Problem:

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (a-x)^2 = && \text{(Pythagoras im unteren Dreieck)} \\ &= h^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot x + x^2 && \text{(Binomische Formel)} \\ &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot x && \text{(Pythagoras im oberen Dreieck)} \\ &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) && \text{(Winkelfunktion im oberen Dreieck)} \end{aligned}$$

Die fehlende Seitenlänge beträgt daher:

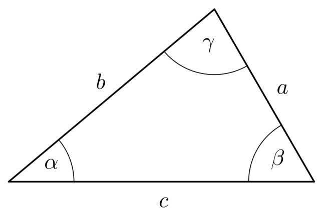
$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)}$$

□

Da dies eine häufige Aufgabenstellung ist, die wir nicht immer nach dem gleichen Schema lösen wollen, nehmen wir in Zukunft als Abkürzung die eben hergeleitete Formel, den sogenannten Cosinussatz.

Cosinussatz:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$



Betrachte die vorkommenden Größen im Cosinussatz und erkläre, wie die entsprechenden Formeln mit den Winkeln β bzw. γ lauten:

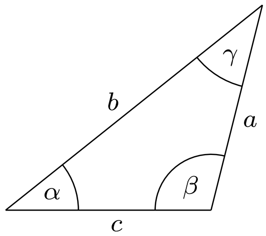
$a^2 =$ ______________________________

$b^2 =$ ______________________________

Erkläre, warum der Cosinussatz eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras ist.
Hinweis: Was passiert, wenn $\gamma = 90°$ ist?

Zuletzt betrachten wir jene Aufgabenstellung, bei der alle drei Seiten eines Dreiecks gegeben und die Winkel gesucht sind.

Beispiel 2.6. Im folgenden Dreieck sind die drei Seitenlängen $a = 4\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$ und $c = 3\,\text{cm}$ bekannt:



Berechne die Größe der drei Winkel.

i) Erkläre, warum ein Dreieck eindeutig bestimmt ist, wenn man seine drei Seitenlängen kennt. Wie würdest du das Dreieck konstruieren?
ii) Erkläre, warum die beiden kürzeren Seiten im Dreieck zusammen stets länger als die längste Seite sein müssen.
iii) Erkläre, warum der größte Winkel im Dreieck gegenüber von der längsten Seite liegt.

Lösung. Diese Aufgabenstellung lässt sich immer mit den gleichen drei Schritten lösen:

(1) Berechne den *größten* Winkel mit dem Cosinussatz:

$$\begin{aligned}
b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta) \\
2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta) &= a^2 + c^2 - b^2 \\
\cos(\beta) &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \\
\beta &= \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}\right) \approx 117{,}28°
\end{aligned}$$

(2) Berechne einen zweiten Winkel mit dem Sinussatz:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$
$$a \cdot \sin(\beta) = b \cdot \sin(\alpha)$$
$$\sin(\alpha) = \frac{a \cdot \sin(\beta)}{b}$$
$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a \cdot \sin(\beta)}{b}\right) \approx 36{,}34^\circ$$

(3) Berechne den dritten Winkel mit der Winkelsumme:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 26{,}38^\circ$$

□

Dass man bei dieser Aufgabenstellung zunächst den *größten* Winkel mit dem Cosinussatz bestimmen soll, hat folgenden Grund: Wir haben bereits gesehen (Beispiel 2.4), dass man bei der Berechnung von Winkeln mit dem Sinussatz darauf aufpassen muss, ob der gesuchte Winkel spitz oder stumpf ist. Der Taschenrechner liefert stets einen spitzen Winkel als Lösung. Bei stumpfen Winkeln mussten wir noch den Supplementärwinkel, also die Ergänzung auf 180°, berechnen.
Dies können wir hier vermeiden, indem wir zuerst den größten Winkel mit dem Cosinussatz berechnen.

Erkläre, warum der zweitgrößte Winkel in jedem Dreieck kleiner als 90° ist.

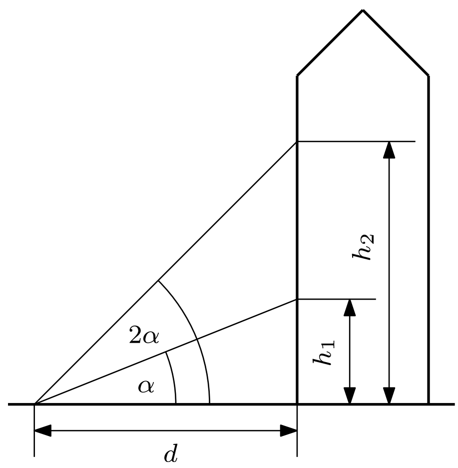
3. Summensätze

Beispiel 3.1. Du stehst vor einem Wolkenkratzer und siehst geradeaus blickend in die Fenster des Erdgeschoßes. Um die Fenster im 10. Stock zu betrachten, musst du den Kopf um 30° nach hinten neigen. Auf welches Stockwerk schaust du, wenn du den Kopf um 60° – also doppelt so weit – nach hinten neigst?

Erkläre, warum es nicht der 20. Stock sein kann. Wie weit müsste man sonst den Kopf für den 40. Stock nach hinten neigen?

Lösung.

Erkläre anhand der nebenstehenden Zeichnung, warum $h_1 = d \cdot \tan(\alpha)$ bzw. $h_2 = d \cdot \tan(2 \cdot \alpha)$ gilt.



Tatsächlich gilt somit

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\tan(2 \cdot \alpha)}{\tan(\alpha)} = \frac{\tan(60^\circ)}{\tan(30^\circ)} = 3 \implies h_2 = 3 \cdot h_1,$$

d.h. man würde auf das 30.Stockwerk blicken. □

Beim Ausdruck $\dfrac{\tan(2 \cdot \alpha)}{\tan(\alpha)}$ kann man α nicht kürzen. Auch ein Umformen von $\tan(2 \cdot \alpha)$ zu $2 \cdot \tan(\alpha)$ ist nicht korrekt! Der mathematische Grund dahinter ist, dass $\tan(\alpha + \beta)$ im Allgemeinen *nicht* dasselbe wie $\tan(\alpha) + \tan(\beta)$ ist!

Um $\tan(2 \cdot \alpha) = \tan(\alpha + \alpha)$ oder allgemein $\tan(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$ und $\sin(\alpha + \beta)$ zu zerlegen, gibt es die sogenannten Summensätze.

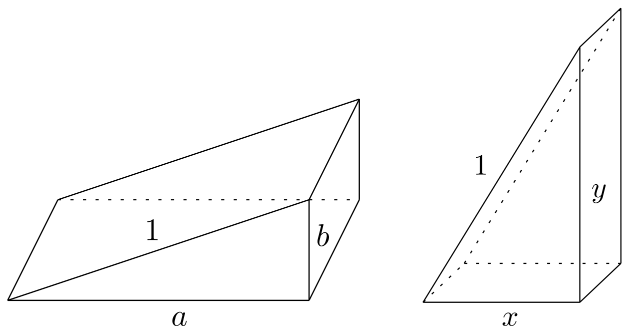
Summensätze:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}$$

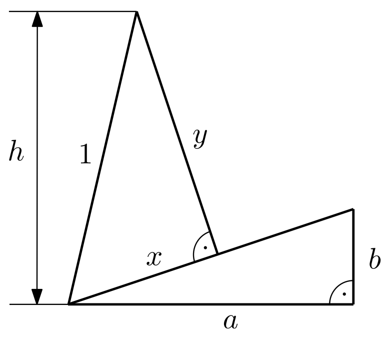
Erkläre unter Verwendung der Summensätze die folgenden Zerlegungen:

$$\sin(2 \cdot \alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$$
$$\cos(2 \cdot \alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$
$$\tan(2 \cdot \alpha) = \frac{2 \cdot \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$

Beispiel 3.2. Von den beiden folgenden Bausteinen kennst du die Seitenlängen a und b bzw. x und y:

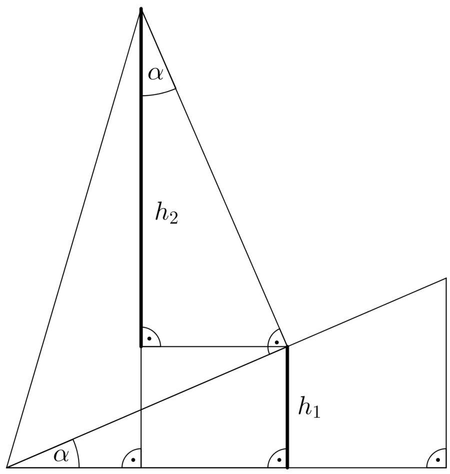


Du stellst einen Baustein so auf den anderen, dass sich folgende Frontalansicht ergibt:



Bestimme die Höhe h der entstandenen Figur.

Lösung. Wir teilen die Höhe h in zwei Teile:



i) Erkläre, warum die beiden eingezeichneten Winkel tatsächlich gleich groß sind.

ii) Finde ähnliche Dreiecke und erkläre warum $\dfrac{h_1}{x} = \dfrac{b}{1}$ gilt.

iii) Finde ähnliche Dreiecke und erkläre warum $\dfrac{h_2}{y} = \dfrac{a}{1}$ gilt.

Die Höhe der entstandenen Figur beträgt also

$$h = h_1 + h_2 = b \cdot x + a \cdot y.$$

□

Du hast gerade nicht nur die Höhe der entstandenen Figur berechnet, sondern auch den Summensatz

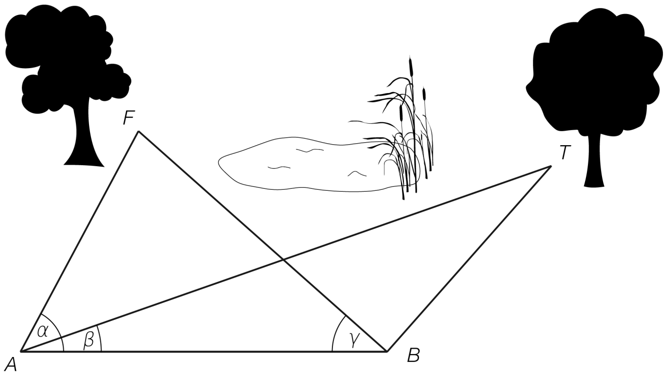
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

bewiesen! Warum? Bezeichne in der obigen Skizze den Steigungswinkel des zweiten Bausteins mit β.

(1) Erkläre, warum $\sin(\alpha + \beta) = h$ gilt.
(2) Erkläre, warum $h_1 = b \cdot x = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)$ gilt.
(3) Erkläre, warum $h_2 = a \cdot y = \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ gilt.

4. Weitere Aufgabenstellungen

Aufgabe 4.1. Bundesinstitut bifie Die Entfernung zwischen zwei Punkten F und T kann wegen eines dazwischenliegenden Teichs nicht direkt gemessen werden.



Zur Berechnung der Entfernung werden zunächst von der 10 m langen Standlinie AB die folgenden Winkel gemessen:

$$\alpha = 75^\circ,\ \beta = 35^\circ,\ \gamma = 60^\circ$$

1) Berechnen Sie die Entfernung $\overline{AF}$.

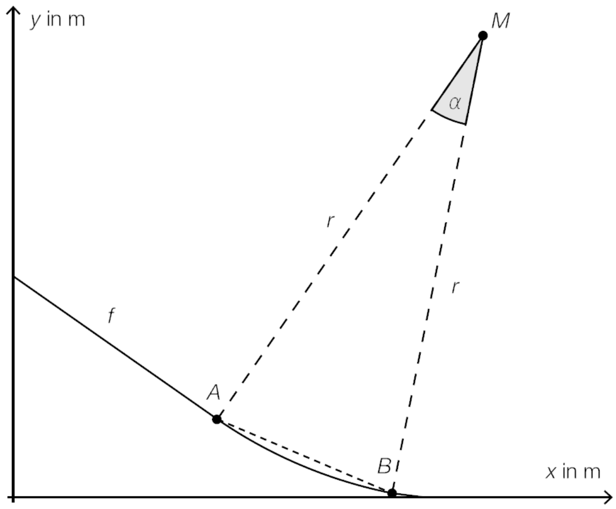
2) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von $\overline{FT}$ auf, wenn $\overline{AT}$ und $\overline{AF}$ bereits ermittelt wurden.

Aufgabe 4.2. Bundesinstitut bifie Der Anlauf der Mühlenkopfschanze in Willingen (Deutschland) ist in der nachstehenden Abbildung vereinfacht als Graph einer Funktion f dargestellt.

A und B sind Punkte eines Kreises mit Mittelpunkt M und Radius $r = 105{,}6$ m.
Die geradlinige Strecke AB hat eine Länge von 43,4 m.

1) Berechnen Sie den Winkel α.

2) Bestimmen Sie, um wie viel Prozent die Strecke AB kürzer als der Kreisbogen von A nach B ist.



4.1 **1)** $\overline{AF} = 12{,}24\ldots$ m
2) $\overline{FT} = \sqrt{\overline{AF}^2 + \overline{AT}^2 - 2 \cdot \overline{AF} \cdot \overline{AT} \cdot \cos(\alpha - \beta)}$
4.2 **1)** $\alpha = 23{,}71\ldots^\circ$ **2)** Die Streckenlänge AB ist um rund 0,71 % kürzer als der Kreisbogen b.