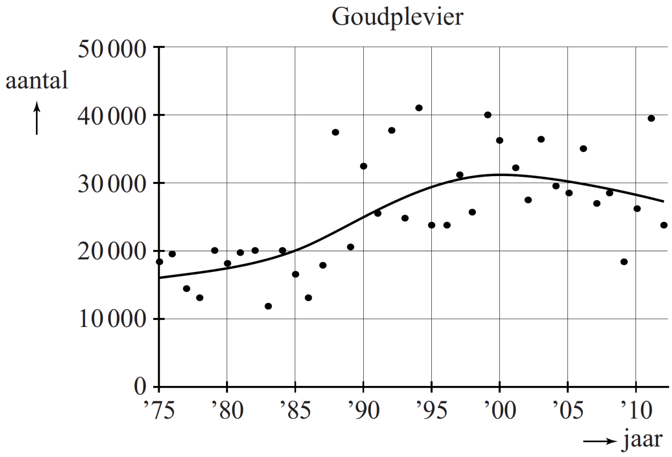
Zentral gestellte niederländische Reifeprüfung Mathematik; https://wiskunde-examens.nl

Wir stellen hier eine Übersetzung der Aufgabenstellungen der niederländischen Reifeprüfung Mathematik (vwo wiskunde A 2019) zur Verfügung. Die Übersetzung wurde vom *Mathematik macht Freu(n)de*-Team mit Unterstützung von *Google Translate* angefertigt. Die Originaldatei ist jeweils nach dem entsprechenden übersetzten Aufgabenblock eingebunden. Bilder und Grafiken wurden aus der Originaldatei in die Übersetzung direkt übernommen. Irrtümer vorbehalten.

VWO WISKUNDE A – 1. TERMIN 2019

Goldregenpfeifer

Ein Goldregenpfeifer ist ein Vogel, den es in den Niederlanden eigentlich nicht gibt, der aber während seiner Wanderungen in den Niederlanden brütet. Die Anzahl der Goldregenpfeifer ist Jahr für Jahr unterschiedlich. In der Abbildung unten ist die Anzahl der Goldregenpfeifer in den Niederlanden in den Jahren von 1975 bis 2012 als schwarze Punkte dargestellt.

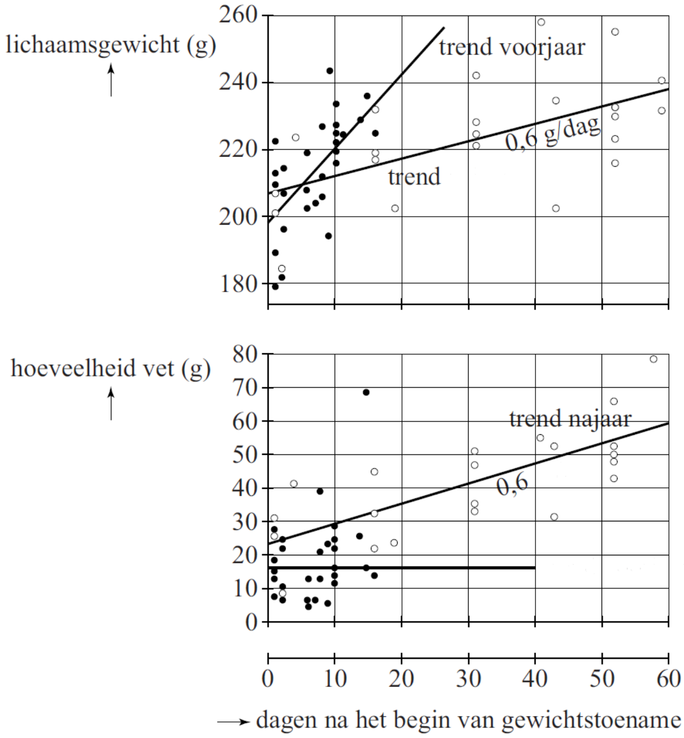


Die Abbildung zeigt auch eine Kurve, die den Verlauf näherungsweise angibt. Wir nehmen an, dass dieser Trend ab 2003 geradlinig verläuft und dass dies auch nach 2012 der Fall ist.

1. **(4 Punkte) Berechnen Sie, wie viele Goldregenpfeifer es gemäß der Trendlinie im Jahr 2020 gibt. Geben Sie Ihre Antwort auf Tausender gerundet an.**

Die Goldregenpfeifer legen sich während ihres Aufenthalts in den Niederlanden Energiereserven für die bevorstehenden Wanderungen an. Dadurch nimmt ihr Gewicht zu.

Die Abbildung unten zeigt das Ergebnis einer Untersuchung der Gewichtszunahme: Das Gewicht und/oder die Menge an Fett wurde an einer gewissen Anzahl von zu verschiedenen Zeiten gefangenen Goldregenpfeifern bestimmt. Die weißen Punkte beziehen sich auf Beobachtungen im Herbst, die schwarzen Punkte auf Beobachtungen im Frühjahr. Die Trendlinien sind ebenfalls eingezeichnet.



Aufgrund spezifischer biologischer Eigenschaften kann in der Forschung bestimmt werden, wann die Gewichtszunahme eines Goldregenpfeifers beginnt. Anhand der Trendlinien in der Abbildung oben kann man untersuchen, ob die folgenden Aussagen wahr sind.

I Im Frühjahr ist die mittlere tägliche Gewichtszunahme eines Goldregenpfeifers etwa doppelt so groß wie im Herbst.

II Die Gewichtszunahme im Frühjahr ist nicht auf eine Zunahme von Fett zurückzuführen.

2. (4 Punkte) Überprüfen Sie für jede Aussage, ob sie wahr ist.

Der **Körperfettanteil** eines Vogels ist der Anteil des Körperfetts des Vogels an seinem Gesamtgewicht in Prozent. Mithilfe von Trendlinien sowohl des Körpergewichts als auch der Fettmenge im Frühjahr leiten die Forschenden folgenden Zusammenhang ab:

$$P_{Frühjahr} = \frac{1600}{2{,}3\,t + 198}$$

Hier ist $P_{Frühjahr}$ der Fettanteil des Vogels im Frühjahr und t die Zeit in Tagen seit Beginn der Gewichtszunahme im Frühjahr.

3. (5 Punkte) Zeigen Sie anhand der Punkte $(0, 198)$ und $(20, 244)$, wie diese Formel aus den Daten in der Abbildung abgeleitet werden kann.

4. **(3 Punkte) Verwenden Sie die Formel, um zu berechnen, ob der Fettanteil im Frühjahr zunimmt oder abnimmt, ohne dabei Zahlen einzusetzen oder eine Skizze zu erstellen.**

Für den Fettanteil im Herbst verwenden wir folgende Formel:

$$P_{Herbst} = \frac{2300 + 60\,t}{207 + 0{,}6\,t}$$

Dabei ist P_{Herbst} der Fettanteil des Vogels im Herbst und t die Zeit in Tagen seit dem Einsetzen der Gewichtszunahme.

Mit der 1. Ableitung des Fettanteils P_{Herbst} kann untersucht werden, ob der Fettanteil P_{Herbst} immer weniger stark zunimmt.

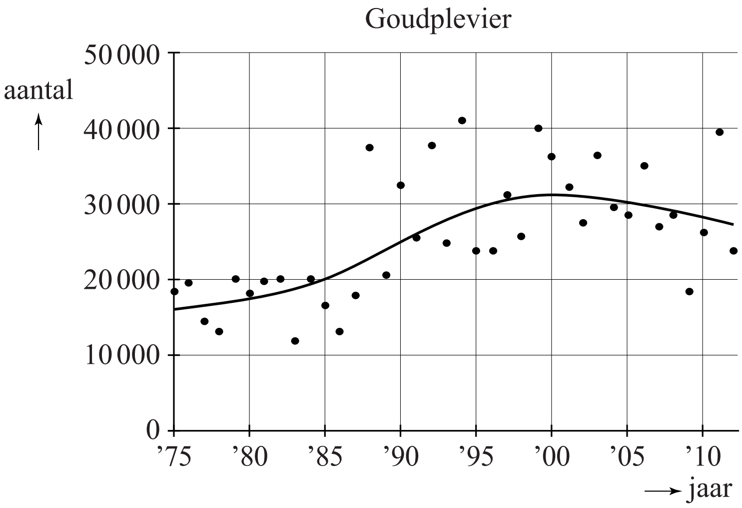
5. **(6 Punkte) Berechnen Sie die 1. Ableitung von P_{Herbst} und untersuchen Sie, ob P_{Herbst} immer weniger stark zunimmt.**

Goudplevieren

Een goudplevier (zie foto) is een vogel die niet in Nederland broedt, maar tijdens zijn trektochten wel in Nederland te vinden is. Er zijn grote verschillen in aantallen goudplevieren tussen de verschillende jaren. In figuur 1 zijn de aantallen goudplevieren in Nederland in de jaren 1975 tot en met 2012 weergegeven als zwarte stippen.

foto

figuur 1



In figuur 1 is ook een kromme getekend die de trend aangeeft. We nemen aan dat vanaf 2003 deze trend een rechte lijn is en dat dit ook na 2012 zo blijft.

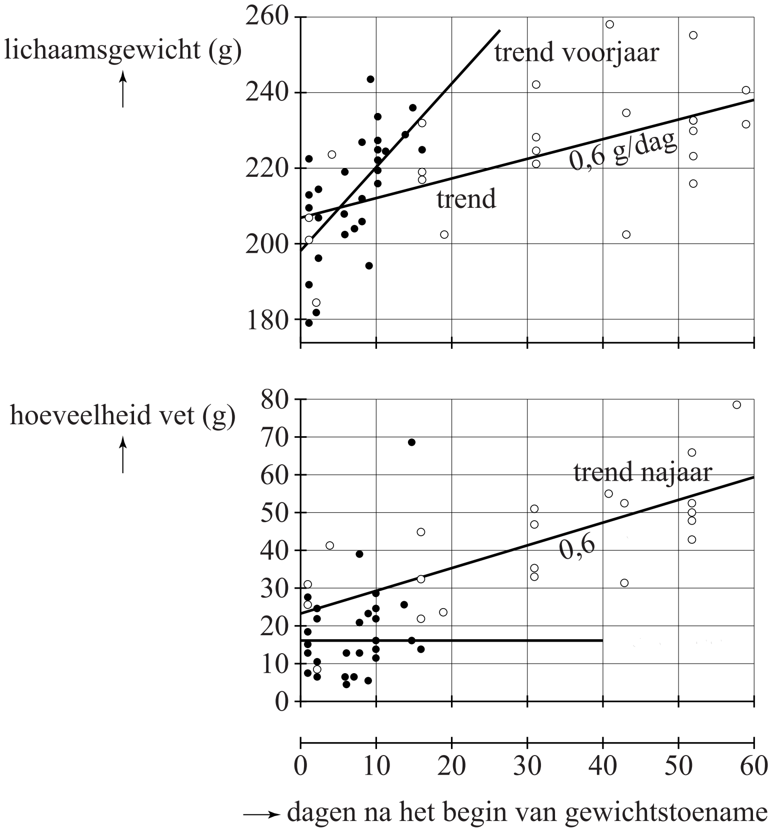
4p **1** Bereken hoeveel goudplevieren er volgens de trendlijn zijn in 2020. Geef je antwoord in gehele duizendtallen.

lees verder ►►►

Tijdens hun verblijf in Nederland bouwen de goudplevieren een reserve op voor de komende trektochten. Hierdoor nemen ze toe in gewicht.

In figuur 2 zie je het resultaat van een onderzoek naar deze gewichtstoename: van een aantal op verschillende tijdstippen gevangen goudplevieren is het gewicht en/of de hoeveelheid vet bepaald. De open stippen horen bij waarnemingen in het najaar en de dichte stippen bij waarnemingen in het voorjaar. Ook zijn de trendlijnen getekend.

figuur 2



Op grond van specifieke biologische kenmerken kunnen de onderzoekers bepalen wanneer de gewichtstoename van een goudplevier begint.
Aan de hand van de trendlijnen in figuur 2 kun je onderzoeken of de volgende stellingen waar zijn.

I In het voorjaar is de gemiddelde gewichtstoename per dag van een goudplevier ongeveer 2 keer zo groot als in het najaar.
II De gewichtstoename in het voorjaar bestaat niet uit vet.

4p **2** Onderzoek voor elk van beide stellingen of deze waar is.

lees verder ►►►

Het **vetpercentage** van een vogel is de hoeveelheid lichaamsvet als percentage van het totale gewicht van de vogel. Met behulp van de trendlijnen in het voorjaar van zowel lichaamsgewicht als vethoeveelheid leiden de onderzoekers het volgende verband af:

$$P_{\text{voorjaar}} = \frac{1600}{2,3 \cdot t + 198}$$

Hierbij is P_{voorjaar} het vetpercentage van de vogel in het voorjaar en t de tijd in dagen na het begin van de gewichtstoename.

5p **3** Laat zien, gebruikmakend van de punten (0, 198) en (20, 244), hoe deze formule is af te leiden uit de gegevens in de figuur.

3p **4** Beredeneer uitsluitend met behulp van de formule, zonder getallen in te vullen of een schets te maken, of het vetpercentage in het voorjaar toeneemt of juist afneemt.

Voor het vetpercentage in het najaar gaan we uit van de volgende formule:

$$P_{\text{najaar}} = \frac{2300 + 60t}{207 + 0,6t}$$

Hierin is P_{najaar} het vetpercentage van de vogel in het najaar en t de tijd in dagen na het begin van de gewichtstoename.

Met behulp van de afgeleide van P_{najaar} kan men onderzoeken of het vetpercentage P_{najaar} afnemend stijgend is.

6p **5** Stel de formule van de afgeleide van P_{najaar} op en onderzoek daarmee of P_{najaar} afnemend stijgend is.

Nummernschilder

Zwischen Mai 2008 und Februar 2013 wurde vom Nationalen Straßenverkehrsdienst die Kennzeichenserie ***Sidecode 7*** für Personenkraftwagen verwendet. Das Foto zeigt eine der ersten Platten aus dieser Serie.

Die Kennzeichen bestehen aus zwei Ziffern, gefolgt von drei Buchstaben und einer Ziffer. Wenn wir davon ausgehen, dass es zu den verwendeten Ziffern und Buchstaben keine weiteren Einschränkungen gibt, gibt es fast 18 Millionen verschiedene Nummernschilder mit *Sidecode 7*.

6. (3 Punkte) Berechnen Sie die Anzahl der möglichen verschiedenen Nummernschilder mit *Sidecode 7* an. Runden Sie auf Hunderttausender.

In dieser Zuordnung gehen wir von folgenden Einschränkungen aus:

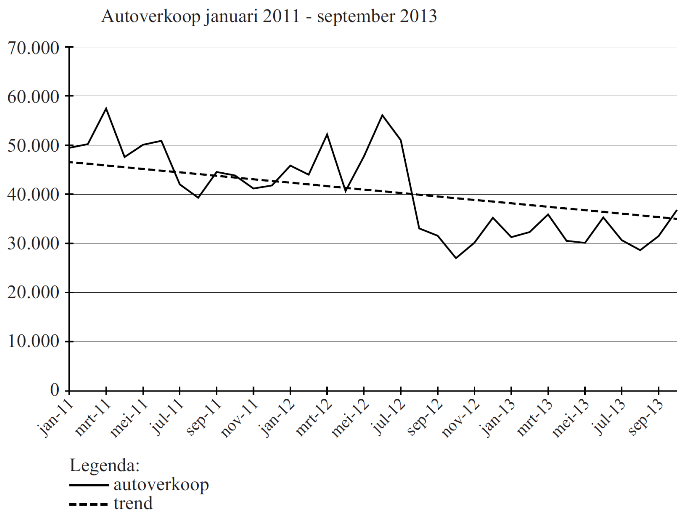
- Ein Nummernschild darf nicht mit 00 beginnen.
- Der erste Buchstabe ist G, H, J, K, L, N, P, R, S, T, X oder Z.
- Vokale (A, E, I, O, U, Y) werden nicht verwendet.
- Die Buchstaben C und Q werden nicht verwendet.
- Bestimmte Drei-Buchstaben-Kombinationen (z.B. NSB) können als anstößig angesehen werden. Infolgedessen werden 82 Drei-Buchstaben-Kombinationen ausgeschlossen.

Ein Reporter eines Automagazins schreibt in einem Artikel, dass aufgrund all dieser Einschränkungen weniger als 20 % aller möglichen Zeichenkombinationen auf einem Personenkraftwagen landen können.

7. (5 Punkte) Untersuchen Sie rechnerisch, ob der Reporter recht hat.

Ab dem 1. März 2013 wurde der ***Serien-Sidecode 8*** für Nummernschilder verwendet. *Sidecode 8* enthält zuerst eine Ziffer, dann drei Buchstaben und schließlich zwei Ziffern. *Sidecode 8* ist *Sidecode 7* sehr ähnlich, aber da andere Einschränkungen gelten, stehen für Personenkraftwagen insgesamt 1,46 Millionen Nummernschilder zur Verfügung.

Im Oktober 2013 fragt sich der Reporter, wie lange diese Serie (ungefähr) halten wird. Er erstellt eine graphische Darstellung des Absatzes neuer PKW ab 2011 und zeichnet eine Trendlinie als passendes Modell mit einem Umsatzrückgang von 375 Neuwagen pro Monat ein.



Die diesem Modell zugehörige Formel lautet:

$$A_n = -375\,n + 37\,250$$

A_n ist die Anzahl der im Monat n verkauften Neuwagen mit $n = 0$ für März 2013, den ersten Monat, in dem *Sidecode 8* verwendet wird.

Das Modell liefert im Mai 2013 eine größere Anzahl verkaufter Neuwagen als gemäß der Grafik tatsächlich verkauft wurden.

8. (3 Punkte) Berechnen Sie, wie viel höher das Ergebnis des Modells ausfällt. Geben Sie Ihre Antwort in ganzen Prozenten an.

9. (3 Punkte) Für dieses Modell kann auch eine rekursive Formel erstellt werden. Stellen Sie diese rekursive Formel auf.

Kentekens

Tussen mei 2008 en februari 2013 werd voor personenauto's de kentekenserie gebruikt die door de Rijksdienst voor het Wegverkeer **sidecode 7** genoemd wordt. Op de foto staat een van de eerste kentekens uit deze serie.

foto

De kentekens bestaan uit twee cijfers, gevolgd door drie letters en tenslotte nog één cijfer.
Als we ervan uitgaan dat er geen beperkingen zijn aan de te gebruiken cijfers en letters, dan zijn er bijna 18 miljoen verschillende kentekens te maken met sidecode 7.

3p **6** Bereken het aantal verschillende kentekens met sidecode 7. Geef je antwoord in gehele honderdduizendtallen.

In deze opgave gaan we echter van de volgende beperkingen uit:
- Een kenteken mag niet met 00 beginnen
- De eerste letter is G, H, J, K, L, N, P, R, S, T, X of Z
- Klinkers (A, E, I, O, U, Y) worden niet gebruikt
- De letters C en Q worden niet gebruikt
- Bepaalde drielettercombinaties (zoals NSB) kunnen als aanstootgevend worden gezien en als gevolg daarvan zijn 82 drielettercombinaties uitgesloten.

Een verslaggever van een autotijdschrift schrijft in een artikel dat door al deze beperkingen minder dan 20% van alle mogelijke kentekens uiteindelijk op een personenauto terecht zal komen.

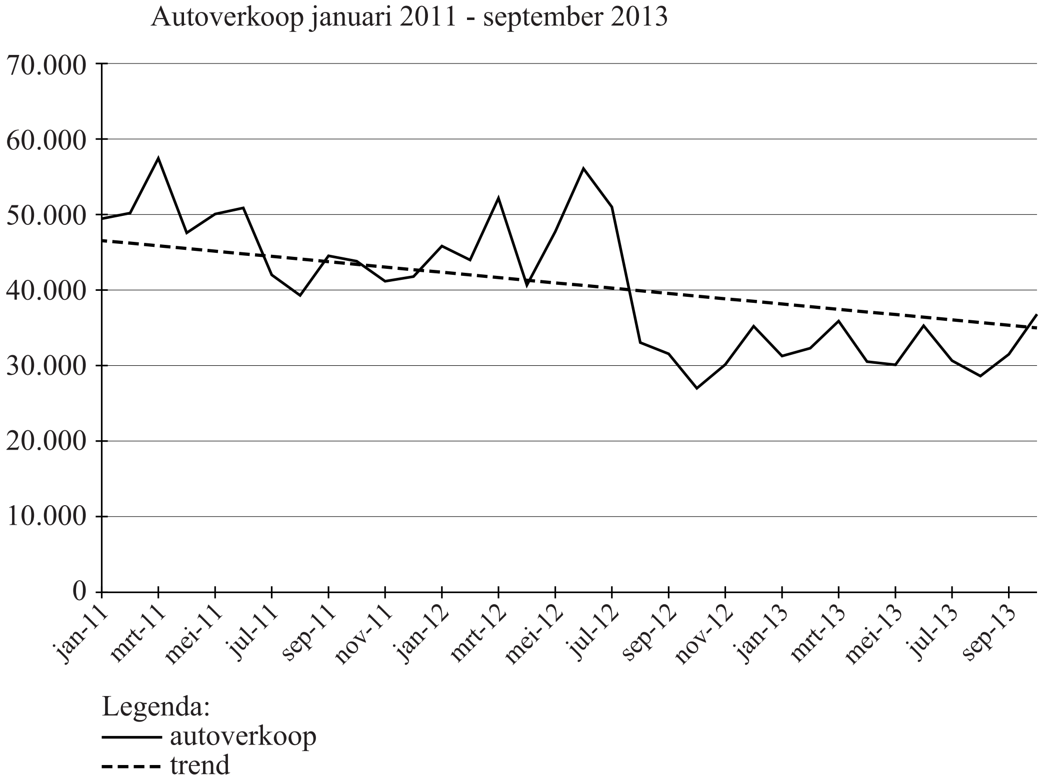
5p **7** Ga met een berekening na of de verslaggever gelijk heeft.

Vanaf 1 maart 2013 werd voor kentekens de serie **sidecode 8** gebruikt. Sidecode 8 bevat eerst een cijfer, dan drie letters en tenslotte twee cijfers. Sidecode 8 lijkt dus erg op sidecode 7 maar omdat er andere beperkingen gelden, zijn in totaal 1,46 miljoen kentekens beschikbaar voor personenauto's.

In oktober 2013 vraagt de verslaggever zich af tot wanneer deze serie (ongeveer) mee zal gaan. Hij maakt zelf een grafiek met daarin de verkoop van nieuwe personenauto's vanaf 2011. Ook maakt hij als bijpassend model een trendlijn met een afname van de verkoop van 375 nieuwe auto's per maand.

lees verder ►►►

figuur



De formule die bij dit model hoort, is:

$$A_n = -375n + 37\,250$$

Hierbij is A_n het aantal verkochte nieuwe auto's in maand n met $n = 0$ voor maart 2013, de eerste maand waarin sidecode 8 gebruikt wordt.

Het model geeft voor mei 2013 een hoger aantal verkochte nieuwe auto's dan er volgens de grafiek werden verkocht.

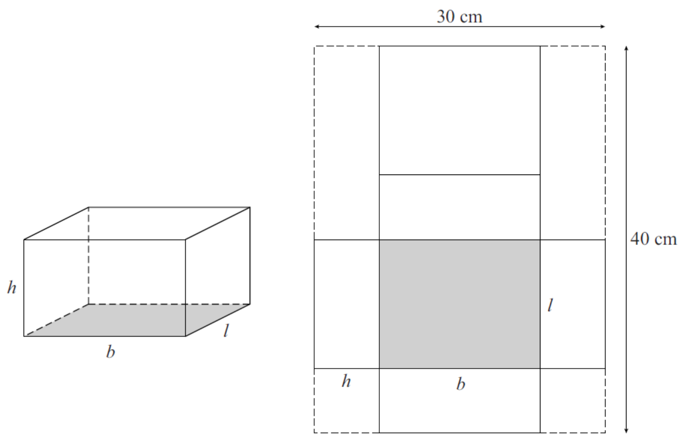
3p **8** Bereken hoeveel procent hoger de uitkomst van het model is. Geef je antwoord in gehele procenten.

Er is ook een recursieve formule op te stellen bij dit model.

3p **9** Stel deze recursieve formule op.

Verpackungen

Um ein Paket in Form eines Balkens herzustellen, wird ein Karton mit $30 \times 40\,\text{cm}$ verwendet. In den Abbildungen unten sehen Sie links eine Verpackung und rechts, wie die Verpackung aus dem Karton ausgeschnitten wird. h ist die Höhe, b die Breite und l die Länge der Verpackung in cm. Der ausgeschnittene Bereich endet genau an den Rändern des Kartons. Siehe dazu auch die Abbildung.



Die Höhe eines bestimmten Pakets beträgt $3\,\text{cm}$.

10. (3 Punkte) Bestimmen Sie Länge und Breite dieser Verpackung und berechnen Sie dann den Inhalt dieser Verpackung.

Die Formel für den Inhalt V in cm^3 der Verpackung ausgedrückt in der Höhe h in cm lautet:

$$V = 2\,h^3 - 70\,h^2 + 600\,h$$

11. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass diese Formel korrekt ist, ohne dabei Zahlen einzusetzen.

Mit dieser Formel kann bestimmt werden, für welche Höhe h (mit $h \leq 15$) der Inhalt maximal ist.

12. (3 Punkte) Berechnen Sie mittels Differenzieren, in welcher Höhe der Inhalt maximal ist. Geben Sie Ihre Antwort auf eine Dezimalstelle genau an.

Effizienz einer Verpackung

Unternehmen wollen Verpackungsmaterial so effizient wie möglich nutzen. Üblicherweise gibt es einen fixes Volumen und zusätzlich soll die Oberfläche der Verpackung so klein wie möglich sein. Man kann dies aber auch umgekehrt anlegen: Für eine bestimmte Oberfläche soll eine Verpackung mit dem größtmöglichen Volumen entstehen. Das größtmögliche Volumen erhält man für eine Kugel, aber eine kugelförmige Verpackung ist meist nicht zielführend.

Um die Effizienz E einer Verpackung mit dem Volumen V und dem Oberflächeninhalt A herauszufinden, vergleichen Sie das Volumen V dieser Verpackung mit dem Volumen einer Kugel desselben Oberflächeninhalts A.

Es gilt:

(1) $$E = \frac{\text{Inhalt } V \text{ der Verpackung mit Oberfläche } A}{\text{Inhalt der Kugel mit Oberfläche } A}$$

Für eine Kugel gilt Folgendes:

(2) $$\text{Kugeloberfläche} = 12{,}57\, r^2$$

(3) $$\text{Kugelvolumen} = 4{,}19\, r^3$$

In diesen Formeln ist r der Radius der Kugel.

Ausgehend von den Formeln 1, 2 und 3 gilt für die Effizienz einer Verpackung folgende Formel:

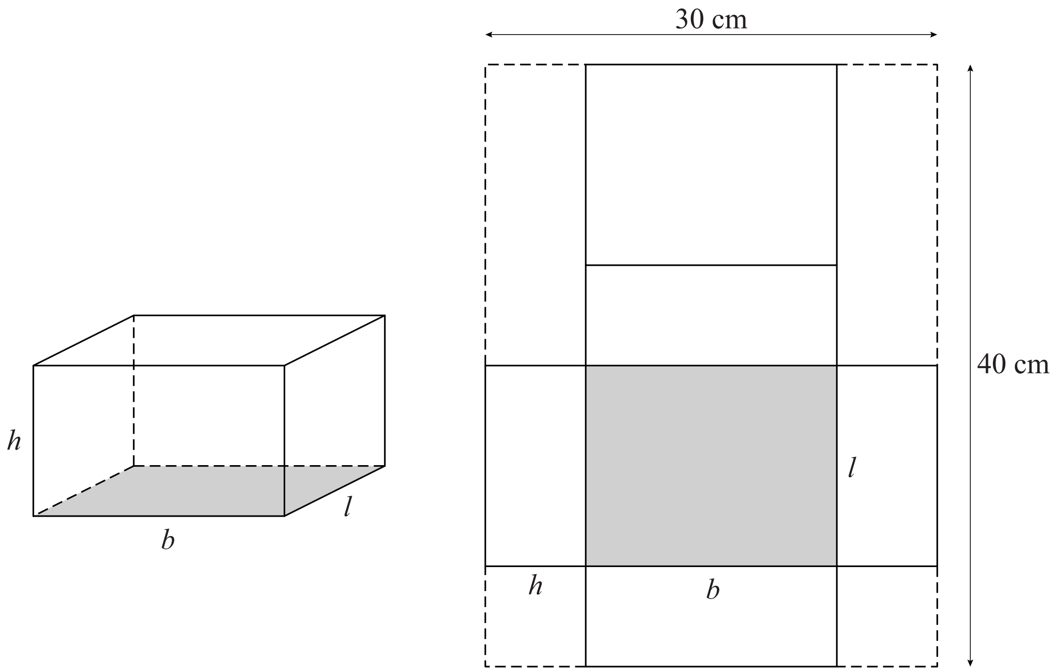
$$E = \frac{V}{4{,}19\left(\sqrt{0{,}08\, A}\right)^3}$$

13. (4 Punkte) Zeigen Sie mit den Formeln 1, 2 und 3, dass diese letzte Formel korrekt ist.

Verpakkingen

Om een verpakking in de vorm van een balk te maken, wordt een karton van 30x40 cm gebruikt. In de afbeeldingen hieronder zie je links een verpakking en rechts hoe de uitslag daarvan uit het karton geknipt wordt. Hierbij is h de hoogte, b de breedte en l de lengte van de verpakking in cm. De uitslag eindigt precies bij de randen van het karton. Zie de figuur.

figuur



Van een bepaalde verpakking is de hoogte gelijk aan 3 cm.

3p **10** Bepaal de lengte en breedte van deze verpakking en bereken daarmee vervolgens de inhoud van deze verpakking.

De formule voor de inhoud V in cm^3 van de verpakking uitgedrukt in de hoogte h in cm is:

$$V = 2h^3 - 70h^2 + 600h$$

4p **11** Toon, zonder getallenvoorbeelden, aan dat deze formule juist is.

Met behulp van deze formule is vast te stellen voor welke hoogte h (met $h \leq 15$) de inhoud maximaal is.

3p **12** Bereken met behulp van differentiëren bij welke hoogte de inhoud maximaal is. Geef je antwoord in één decimaal.

lees verder ►►►

Efficiëntie van een verpakking

Bedrijven willen zo efficiënt mogelijk omgaan met verpakkingsmateriaal. Meestal is er een vaststaande inhoud en wil men dat de oppervlakte van de verpakking zo klein mogelijk wordt, maar je kunt het ook andersom bekijken: bij een bepaalde oppervlakte wil je een verpakking met zo groot mogelijke inhoud. De maximale inhoud krijg je als je een bol neemt, maar een bol als verpakkingsmateriaal is vaak niet handig.

Om de efficiëntie E van een verpakking met een inhoud V en een oppervlakte A te weten te komen, vergelijk je de inhoud V van die verpakking met de inhoud van een bol met diezelfde oppervlakte A.

Er geldt:

formule 1: $$E = \frac{\text{inhoud } V \text{ van verpakking met oppervlakte } A}{\text{inhoud van bol met oppervlakte } A}$$

Voor een bol geldt het volgende:

formule 2: $\text{Oppervlakte bol} = 12{,}57r^2$

formule 3: $\text{Inhoud bol} = 4{,}19r^3$

In deze formules is r de straal van de bol.

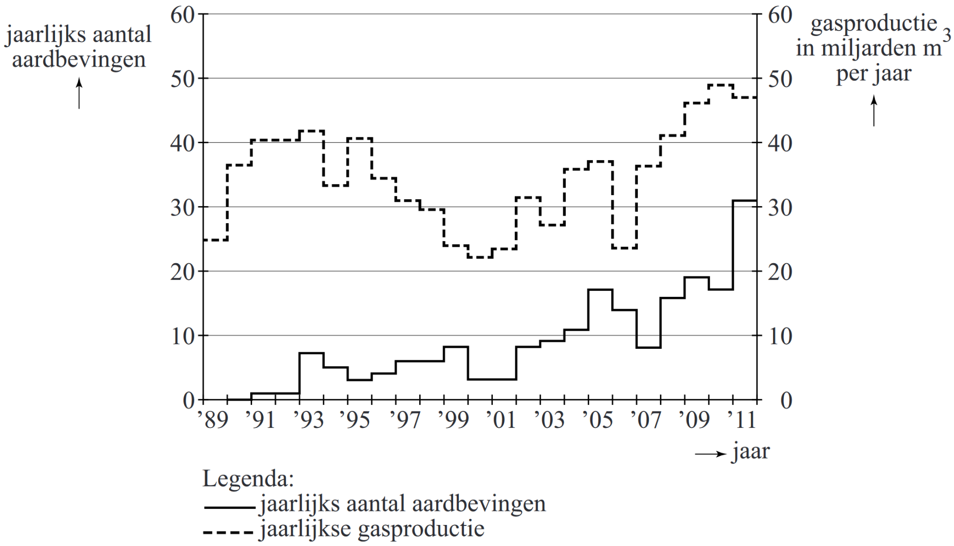
Uitgaande van de formules 1, 2 en 3 geldt voor de efficiëntie van een verpakking de volgende formule:

$$E = \frac{V}{4{,}19\left(\sqrt{0{,}08A}\right)^3}$$

4p **13** Toon met de formules 1, 2 en 3 aan dat deze laatste formule juist is.

Erdbeben in Groningen

In der Provinz Groningen kommt es regelmäßig zu Erdbeben infolge der Gasförderung. Dies wurde 2013 in großem Umfang untersucht. So wurde etwa der Zusammenhang zwischen Gasproduktion und Erdbeben untersucht. Einige Ergebnisse hierzu sind in der Abbildung unten dargestellt. Diese Abbildung ist vergrößert auch in der Beilage zur Ausarbeitung zu finden. Hier sieht man beispielsweise, dass es 1993 sieben Erdbeben gab und im selben Jahr 42 Milliarden Kubikmeter Gas produziert wurden.



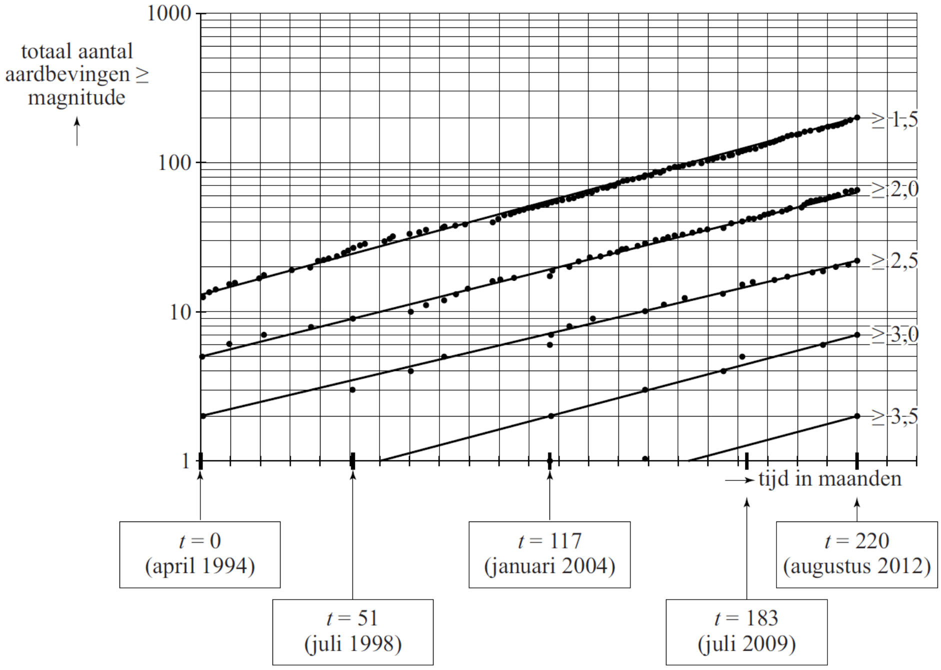
Wir betrachten die folgenden drei Aussagen:

- Die Gasproduktion und die Anzahl der Erdbeben nahmen im gesamten Zeitraum von 2000 bis 2011 um denselben Prozentsatz zu.
- Wenn die Gasproduktion in einem Jahr nach 2000 sank, führte dies ein Jahr später immer zu einem Rückgang der Erdbeben.
- Im Zeitraum 2005-2011 war die mittlere jährliche Zunahme der Anzahl der Erdbeben größer als im Zeitraum 1998-2004.

14. (5 Punkte) Geben Sie für jede Aussage an, ob sie wahr ist oder nicht. Verwenden Sie in Ihrer Erklärung die Daten aus der Abbildung oben und gegebenenfalls auch die Abbildung in der Beilage.

Die **Magnitude**, die Stärke eines Erdbebens, wird mit einer Zahl auf der Richterskala ausgedrückt. Die Abbildung unten zeigt die Erdbeben in Groningen ab 1994 klassifiziert nach Stärke. Dies ergibt ein auffälliges Muster entlang der logarithmisch skalierten vertikalen Achse: Alle eingezeichneten Graphen sind annähernd parallele Geraden.

Jeder Punkt in dieser Abbildung repräsentiert ein Erdbeben einer bestimmten Stärke: Man sieht, dass es kurz vor Juli 2009 ein Erdbeben mit Magnitude $\geq 3{,}0$ gab. Dieses Erdbeben sieht man auch in den Erdbeben der Klassen $\geq 2{,}5$, $\geq 2{,}0$ und $\geq 1{,}5$.



Die Studie befasste sich nur mit Erdbeben, die Schäden verursachen können. Da Erdbeben mit einer Stärke von weniger als 1,5 keinen Schaden anrichten, sind sie in der Abbildung nicht enthalten.

15. (3 Punkte) Berechnen Sie, wie viel Prozent der Erdbeben im August 2012 mit Magnitude $\geq 2{,}0$ eine Magnitude von 2,5 oder größer haben. Geben Sie Ihre Antwort in ganzen Prozenten an.

Die Tatsache, dass die Graphen in der Abbildung annähernd parallele Geraden sind, bedeutet, dass die Anzahl der Erdbeben jeder Klasse mit ungefähr demselben Wachstumsfaktor exponentiell zunimmt. Die Gesamtzahl der Erdbeben A mit Magnituden $\geq 1{,}5$ kann mit folgender Formel beschrieben werden:

$$A = 12 \cdot e^{0{,}013\,t} \quad \text{mit } t = 0 \text{ im April 1994 und } t \text{ in Monaten}$$

16. (4 Punkte) Berechnen Sie mittels Differenzieren den Wert der Ableitung von A bei $t = 117$. Geben Sie Ihre Antwort auf eine Dezimalstelle genau an und erläutern Sie die Bedeutung dieses Werts in diesem Kontext.

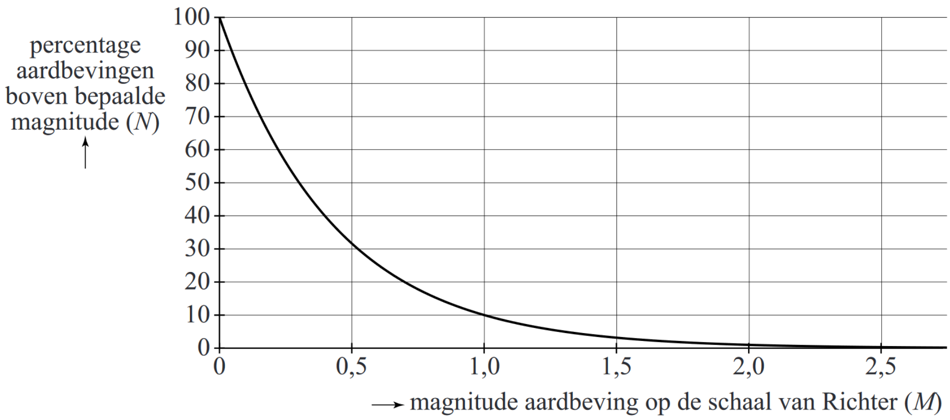
Die Formeln der weiteren Geraden in der Abbildung können von jenen für die Magnituden $\geq 1{,}5$ abgeleitet werden. In der Grafik gibt es eine Gerade für Magnituden $\geq 2{,}0$. Diese Gerade befindet sich auf der gleichen Höhe wie das Diagramm für Magnituden $\geq 1{,}5$ 85 Monate später.

Unten sind vier Formeln angegeben. Eine der vier ist für Magnituden $\geq 2{,}0$ korrekt:

A $A_{2,0} = 12 \cdot e^{0{,}013\,(t+85)}$ mit $t = 0$ im April 1994
B $A_{2,0} = 12 \cdot e^{0{,}013\,(t-85)}$ mit $t = 0$ im April 1994
C $A_{2,0} = 12 \cdot e^{0{,}013\,t+85}$ mit $t = 0$ im April 1994
D $A_{2,0} = 12 \cdot e^{0{,}013\,t-85}$ mit $t = 0$ im April 1994

17. (3 Punkte) Begründen Sie, welche der vier Formeln richtig ist.

In einem Bericht der staatlichen Bergbauaufsicht wird festgestellt, dass ein Zusammenhang zwischen der Magnitude und dem Prozentsatz der Erdbeben über dieser Stärke besteht. Diese Beziehung ist in Abbildung unten dargestellt.



Zum Beispiel kann man ablesen, dass 10 % der Erdbeben eine Stärke über 1,0 haben. Dieser Graph hat die folgende Gleichung: $N = 10^{a-M}$

Dabei ist M die Magnitude und N der Prozentsatz der Erdbeben mit Magnitude größer als M.

18. (3 Punkte) Zeigen Sie rechnerisch, dass gilt: $a = 2$

Umgekehrt kann man sich auch fragen, wie stark die (beispielsweise) 20 % stärksten Erdbeben mindestens waren. Um Fragen wie diese zu beantworten, ist es hilfreich, die Formel neu zu schreiben.

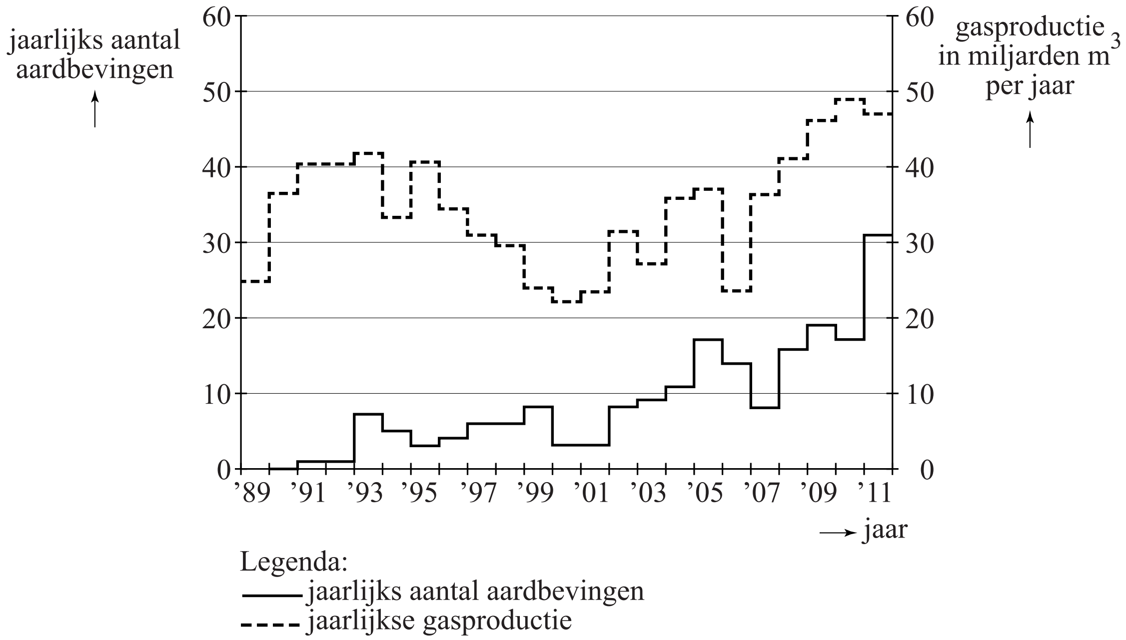
Die Formel $N = 10^{2-M}$ kann auch als $M = p + q \cdot \log(N)$ geschrieben werden.

19. (3 Punkte) Berechnen Sie p und q.

Groningse aardbevingen

In de provincie Groningen vinden, als gevolg van gasproductie, regelmatig aardbevingen plaats. In 2013 is daar grootschalig onderzoek naar gedaan. Zo werd er gekeken naar het verband tussen de gasproductie en aardbevingen. Enkele resultaten daarvan staan in figuur 1. Deze figuur staat ook, vergroot, op de uitwerkbijlage. Hier zie je bijvoorbeeld dat er in 1993 zeven aardbevingen zijn geweest en er in datzelfde jaar 42 miljard kubieke meter gas is geproduceerd.

figuur 1



We bekijken de volgende drie beweringen:

1 De gasproductie en het aantal aardbevingen zijn over de gehele periode 2000-2011 procentueel evenveel gestegen.
2 Als na 2000 de gasproductie daalt, dan heeft dat altijd een jaar later ook een daling van het aantal aardbevingen tot gevolg.
3 In de periode 2005-2011 is de gemiddelde stijging per jaar van het aantal aardbevingen groter dan in de periode 1998-2004.

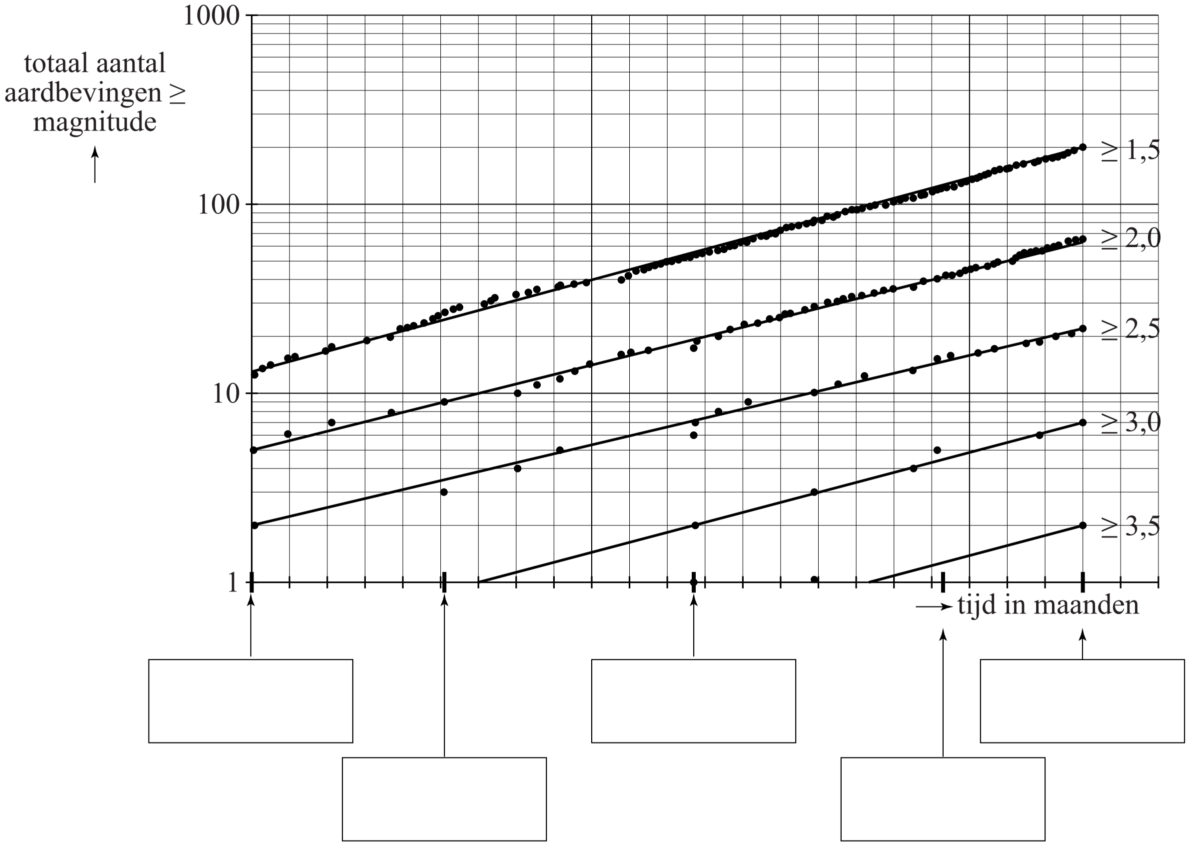
5p **14** Geef van elke bewering aan of deze waar is of niet. Gebruik in je toelichting gegevens uit figuur 1 en gebruik daarbij eventueel de figuur op de uitwerkbijlage.

De **magnitude**, de kracht van een aardbeving, wordt uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter.
In figuur 2 zijn de Groningse aardbevingen vanaf 1994 verzameld en ingedeeld naar sterkte. Dat geeft bij een logaritmische schaalverdeling langs de verticale as een opvallend patroon: alle grafieken zijn bij benadering evenwijdige rechte lijnen.

lees verder ►►►

Elke stip in deze figuur stelt een aardbeving van een zekere magnitude voor: zo kun je zien dat er vlak voor juli 2009 een aardbeving van magnitude $\geq 3{,}0$ heeft plaatsgevonden: die aardbeving zie je dus ook terug bij de aardbevingen van de klassen $\geq 2{,}5$; $\geq 2{,}0$ en $\geq 1{,}5$.

figuur 2



In het onderzoek werden alleen aardbevingen bekeken die schade zouden kunnen veroorzaken. Omdat aardbevingen met een magnitude van minder dan 1,5 geen schade aanrichten, zijn deze niet in figuur 2 opgenomen.

3p **15** Bereken voor augustus 2012 hoeveel procent van het aantal aardbevingen van magnitude $\geq 2{,}0$ een magnitude van 2,5 of hoger heeft. Geef je antwoord in gehele procenten.

Het feit dat de grafieken in figuur 2 evenwijdige rechte lijnen zijn, betekent dat het aantal aardbevingen van elke klasse exponentieel toeneemt met dezelfde groeifactor. Het totaal aantal aardbevingen A voor magnitudes $\geq 1{,}5$ is te beschrijven met de volgende formule:

$A = 12 \cdot \mathrm{e}^{0{,}013t}$ met $t = 0$ voor april 1994 en t in maanden.

4p **16** Bereken door middel van differentiëren de waarde van de afgeleide van A voor $t = 117$. Geef je antwoord in één decimaal en leg uit wat de betekenis van deze waarde is in deze situatie.

lees verder ►►►

De formules van de overige lijnen in figuur 2 kunnen worden afgeleid van die voor de magnitudes $\geq 1{,}5$. Bekijk de grafiek voor de magnitudes $\geq 2{,}0$. Deze grafiek is 85 maanden later op dezelfde hoogte als de grafiek voor magnitudes $\geq 1{,}5$.

Hieronder staan vier formules. Een van de vier is juist voor de magnitudes $\geq 2{,}0$:

A $\quad A_{2,0} = 12 \cdot e^{0,013(t+85)}$ met $t = 0$ voor april 1994

B $\quad A_{2,0} = 12 \cdot e^{0,013(t-85)}$ met $t = 0$ voor april 1994

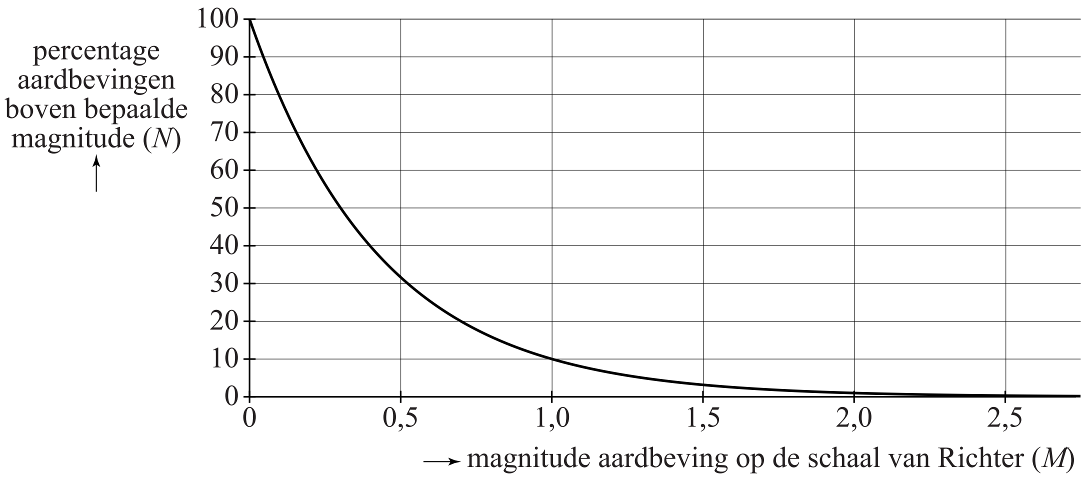
C $\quad A_{2,0} = 12 \cdot e^{0,013t+85}$ met $t = 0$ voor april 1994

D $\quad A_{2,0} = 12 \cdot e^{0,013t-85}$ met $t = 0$ voor april 1994

3p **17** Beredeneer welke van de vier formules juist is.

In een rapport van het Staatstoezicht op de Mijnen wordt geconstateerd dat er een duidelijk verband is tussen de magnitude en het percentage aardbevingen boven die magnitude. In figuur 3 is dat verband weergegeven.

figuur 3



Zo is bijvoorbeeld af te lezen dat 10% van de aardbevingen een magnitude boven de 1,0 heeft.
Bij deze grafiek hoort de volgende formule:

$$N = 10^{a-M}$$

Hierbij is M de magnitude en N het percentage van de aardbevingen boven magnitude M.

3p **18** Laat met een berekening zien dat geldt: $a = 2$.

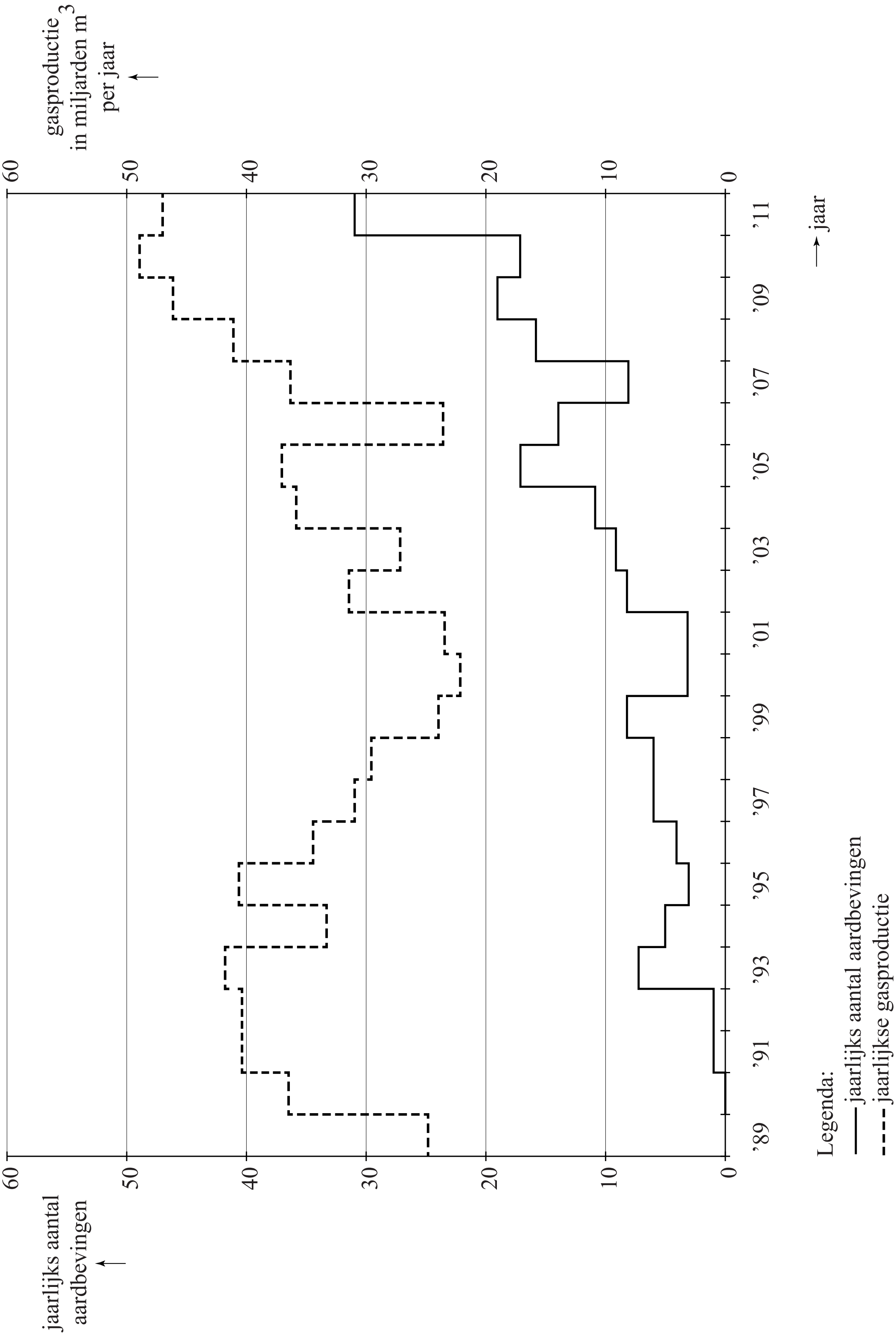
Omgekeerd kun je je ook afvragen welke magnitude de (bijvoorbeeld) 20% zwaarste aardbevingen minstens hadden. Om vragen als deze te beantwoorden, is het handig de formule te herschrijven.
De formule $N = 10^{2-M}$ is te herleiden tot $M = p + q \cdot \log(N)$.

3p **19** Bereken p en q.

uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________________ Kandidaatnummer ____________

14

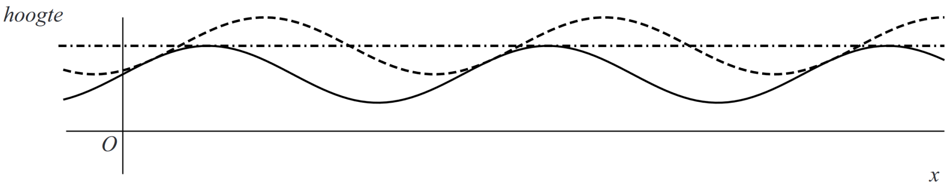


Sandweg

Entlang des *Zandpad* („Sandweg“) in Utrecht gibt es einen Zaun, der aus zwei sich berührenden Sinuskurven besteht. Siehe dazu das Bild unterhalb.

Die folgende Abbildung zeigt schematisch die beiden Sinuskurven im Zaun.

figuur



Die mit der unteren Sinuskurve verbundene Formel lautet:

$$S_{unten} = 100 + 50 \sin\left(\frac{\pi}{3}\, x\right)$$

S_{unten} ist die Höhe in Zentimetern und x der Abstand zum Ausgangspunkt in Metern. Die Maxima der unteren Sinuskurve liegen auf der Mittellinie (Gerade, die exakt in der Mitte zwischen Maxima und Minima liegt) der oberen Sinuskurve. Die Amplituden beider Sinuskurven sind gleich. Weiters ist bekannt, dass sich die beiden Sinuskurven bei $x = \frac{1}{2}$ und bei $x = 6\,\frac{1}{2}$ berühren.

20. (8 Punkte) Geben Sie die Gleichung für die obere Sinuskurve an und erklären Sie, wie Sie zu dieser Antwort kommen.

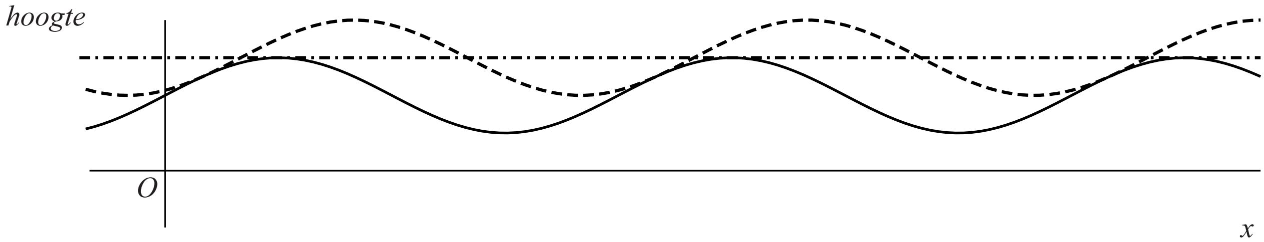
Zandpad

Langs het Zandpad in Utrecht staat een hek dat bestaat uit twee sinusoïden, die elkaar raken. Zie de foto.

foto

In de figuur hieronder zijn de twee sinusoïden in het hek schematisch weergegeven.

figuur



De formule die bij de onderste sinusoïde hoort, luidt:

$$S_{\text{onderste}} = 100 + 50\sin(\frac{\pi}{3}x)$$

Hierbij is S_{onderste} de hoogte in centimeters en x de afstand tot het beginpunt op de evenwichtsstand in meters.
De toppen van de onderste sinusoïde liggen op de evenwichtsstand van de bovenste sinusoïde. De amplitudes van beide sinusoïden zijn gelijk. Verder is gegeven dat de twee sinusoïden elkaar bij $x = \frac{1}{2}$ en ook bij $x = 6\frac{1}{2}$ raken.

8p **20** Geef de formule voor de bovenste sinusoïde en licht toe hoe je je antwoord gevonden hebt.