Zentral gestellte niederländische Reifeprüfung Mathematik; https://wiskunde-examens.nl

Wir stellen hier eine Übersetzung der Aufgabenstellungen der niederländischen Reifeprüfung Mathematik (vwo wiskunde C) zur Verfügung. Die Übersetzung wurde vom *Mathematik macht Freu(n)de*-Team mit Unterstützung von *Google Translate* angefertigt. Die Originaldatei ist jeweils nach dem entsprechenden übersetzten Aufgabenblock eingebunden. Bilder und Grafiken wurden aus der Originaldatei in die Übersetzung direkt übernommen. Irrtümer vorbehalten.

vwo wiskunde C – 2. Termin 2018

Rijksmuseum (Lösungen)

Das Amsterdamer Rijksmuseum (siehe Foto) wurde am 13. April 2013 nach zehnjähriger Renovierung wiedereröffnet. Seitdem hat das Museum viel Werbung gemacht: Es gibt große Ausstellungen in den Gärten und große Anschaffungen werden gemacht. Das Museum macht auch online Fortschritte. Beispielsweise ist der Teil der Website des Museums, auf dem man seine eigene Sammlung zusammenstellen kann, äußerst beliebt.

Die Anzahl der Besuche auf der Website stieg von 2 861 948 im Jahr 2012 auf 6 091 312 im Jahr 2013. Außerdem stieg die durchschnittliche Anzahl der pro Besuch angeforderten Seiten von 5,62 auf 7,35.

1. **(3 Punkte) Berechnen Sie, um wie viel Prozent sich die Gesamtzahl der angeforderten Seiten im Jahr 2013 gegenüber 2012 erhöht hat. Runden Sie das Ergebnis auf ganze Prozent.**

Die Anzahl der Besuche auf der Website stieg also von 2 861 948 im Jahr 2012 auf 6 091 312 im Jahr 2013. Die Gesamtaufenthaltsdauer aller dieser Besuche im Jahr 2012 betrug 15 025 248 Minuten. Die Gesamtaufenthaltsdauer im Jahr 2013 war 3,75-mal länger als die Gesamtaufenthaltsdauer im Jahr 2012.

2. **(3 Punkte) Berechnen Sie, wie viel länger die durchschnittliche Aufenthaltsdauer pro Besuch im Jahr 2013 war als im Jahr 2012. Runden Sie das Ergebnis auf ganze Minuten.**

Einige Zeit später gab das Rijksmuseum eine Veröffentlichung über den wirtschaftlichen Wert des Rijksmuseums heraus. Darin ist der Beitrag (direkt oder indirekt) pro Besucher*in des Rijksmuseums zum niederländischen Bruttoinlandsprodukt (BIP) angeführt. Zu diesem Zeitpunkt wurden die 1,5 Millionen Besucher*innen aus dem Jahr 2013 als Besucher*innenzahl des Museums angenommen. Wenn das Rijksmuseum mehr als 1,5 Millionen Besucher*innen hat, trägt jede*r Besucher*in des Rijksmuseums zusätzlich zu diesen 1,5 Millionen direkt oder indirekt 110 Euro zum BIP bei. Als Formel ausgedrückt: $B = 110 \cdot (x - 1{,}5)$. Dabei ist B der Beitrag zum BIP in Millionen Euro und x die Anzahl der Museumsbesucher*innen in Millionen (mit $x > 1{,}5$).

3. **(3 Punkte) Berechnen Sie, bei wie vielen Besucher*innen der Beitrag zum BIP 200 Millionen Euro beträgt. Runden Sie das Ergebnis auf Zehntausende von Besuchern.**

Unter dem Rijksmuseum, das häufig von Fußgänger*innen und Radfahrer*innen genutzt wird, verläuft eine Unterführung. Amsterdams Bevölkerung befürchtet, dass die Unterführung nach der Wiedereröffnung für Radfahrer*innen verboten sein würde, da sie auch Eingänge zum Museum enthält und dann zu voll werden könnte.

Vor der Wiedereröffnung wurde daher eine Untersuchung der Anzahl der Fußgänger*innen durchgeführt, die sich gleichzeitig in der Unterführung befinden. Besonders wichtig war die Anzahl der Fußgänger*innen während der Stoßzeiten an intensiven Tagen. Basierend auf der Anzahl von 2 Millionen jährlichen Museumsbesuchen, anderen Passant*innen und unter Berücksichtigung folgender Annahmen kann die untenstehende Tabelle vervollständigt werden:

- An einem intensiven Tag gibt es dreimal so viele Fußgänger*innen wie an einem durchschnittlichen Tag. An einem ruhigen Tag ist die Anzahl der Fußgänger*innen ein Drittel der Anzahl eines durchschnittlichen Tages.
- Auf jede durchschnittliche Stunde entfällt $\frac{1}{10}$ der täglichen Anzahl von Fußgänger*innen, auf jede Stunde in der Stoßzeit $\frac{1}{5}$ der täglichen Anzahl.
- Jede Minute gibt es $\frac{1}{60}$ der Anzahl der Fußgänger*innen, die es in einer Stunde gibt.

Diese Tabelle ist auch in der Beilage enthalten.

Um sich ein Bild von diesen Zahlen zu machen, wird die Fußgänger*innendichte k, die Anzahl der Fußgänger*innen pro Quadratmeter, aus den obenstehenden Zahlen berechnet:

$$k = \frac{\text{Anzahl der Fußgänger*innen pro Minute}}{60 \cdot \text{Gehgeschwindigkeit} \cdot \text{Breite des Fußwegs}}$$

Hier ist die Gehgeschwindigkeit in m/s und die Breite des Fußwegs in m. Die mittlere Gehgeschwindigkeit beträgt 0,75 m/s. Die verfügbare Breite der Fußwege in der Unterführung beträgt 6 Meter. Die Fußgänger*innendichte von 0,71 ist die Grenze, die nicht überschritten werden soll.

4. **(4 Punkte) Berechnen Sie, ob die Fußgängerdichte am intensivsten Zeitpunkt, einer Minute während der Stoßzeit an einem intensiven Tag, unter** 0,71 **bleibt. Sie können die Tabelle in der Beilage verwenden.**

Rijksmuseum

Op 13 april 2013 heropende het Amsterdamse Rijksmuseum (zie de foto), na een verbouwing van tien jaar. Het museum doet er sindsdien veel aan om publiciteit te genereren: er zijn grote exposities in de tuinen en er worden grote aanwinsten verworven.
Ook online timmert het museum aan de weg. Zo is het gedeelte van de website van het museum waar je je eigen collectie kunt samenstellen ongekend populair.

foto

Het aantal bezoeken aan de website nam van 2 861 948 in 2012 toe tot 6 091 312 in 2013. Daarnaast nam het gemiddelde aantal pagina's dat per bezoek opgevraagd werd toe van 5,62 tot 7,35.

3p **1** Bereken met hoeveel procent het totale aantal opgevraagde pagina's in 2013 is toegenomen ten opzichte van 2012. Rond je antwoord af op gehele procenten.

Het aantal bezoeken aan de website nam dus toe van 2 861 948 in 2012 tot 6 091 312 in 2013. De totale verblijfsduur in 2012 van al die bezoeken samen was 15 025 248 minuten. De totale verblijfsduur in 2013 was 3,75 keer zo groot als de totale verblijfsduur in 2012.

3p **2** Bereken hoeveel de gemiddelde verblijfsduur per bezoek in 2013 langer was dan in 2012. Rond je antwoord af op gehele minuten.

Enige tijd later bracht het Rijksmuseum een publicatie uit over de economische waarde van het Rijksmuseum. Daarin werd beschreven wat (direct of indirect) de bijdrage van een Rijksmuseumbezoeker aan het Nederlandse bruto binnenlands product (BBP) is. Er werd toen nog uitgegaan van 1,5 miljoen bezoekers aan het museum in 2013.
Als er meer dan 1,5 miljoen Rijksmuseumbezoekers zijn, dan levert elke Rijksmuseumbezoeker boven die 1,5 miljoen, direct of indirect, een bijdrage van € 110 aan het BBP. In formulevorm: $B = 110 \cdot (x - 1,5)$, met B de bijdrage aan het BBP in miljoenen euro's en x het aantal bezoekers van het museum in miljoenen (met $x > 1,5$).

3p **3** Bereken bij hoeveel bezoekers de bijdrage aan het BBP € 200 miljoen is. Rond je antwoord af op tienduizenden bezoekers.

lees verder ►►►

Onder het Rijksmuseum loopt een onderdoorgang, die veelvuldig door voetgangers en fietsers gebruikt wordt. Amsterdammers vreesden dat, na de heropening, de onderdoorgang voor fietsers verboden zou worden, omdat zich hierin ook de ingangen van het museum bevinden en het dan te druk zou kunnen gaan worden.

Vóór de heropening is dan ook onderzoek gedaan naar het aantal voetgangers dat zich tegelijkertijd zou gaan ophouden in de onderdoorgang. Hierbij was vooral het aantal voetgangers tijdens de piekuren op drukke dagen van belang. Uitgaande van het aantal van 2 miljoen jaarlijkse museumbezoekers, andere passanten én rekening houdend met enkele aannames die onder de tabel staan, kan de tabel worden ingevuld. Deze tabel staat ook op de uitwerkbijlage.

tabel

totaal aantal voetgangers (museumbezoekers en passanten samen)					
Aantal per / Op een…	dag	gemiddeld uur	piekuur	minuut in een gemiddeld uur	minuut in een piekuur
rustige dag					
gemiddelde dag	15 100				
drukke dag					

- Op een drukke dag zijn er driemaal zoveel voetgangers als op een gemiddelde dag; op een rustige dag is dat 1/3^e deel van het aantal voetgangers op een gemiddelde dag.
- In een gemiddeld uur loopt er 1/10^e deel van het dagelijks aantal voetgangers, tijdens een piekuur loopt er 1/5^e deel van het dagelijkse aantal.
- Elke minuut loopt er 1/60^e deel van het aantal dat er in een uur loopt.

Om een beeld te krijgen van de drukte wordt uit de voorgaande cijfers de voetgangersdichtheid k berekend, het aantal voetgangers per vierkante meter:

$$k = \frac{\text{aantal voetgangers per minuut}}{60 \times \text{loopsnelheid} \times \text{breedte van het voetpad}}$$

Hierin is de loopsnelheid in m/s en de breedte van het voetpad in m.
De gemiddelde loopsnelheid is 0,75 m/s. De beschikbare breedte van de voetpaden in de onderdoorgang is 6 meter. Als de voetgangersdichtheid boven de 0,71 komt, is er sprake van onacceptabele drukte.

4p **4** Ga met een berekening na of de voetgangersdichtheid op het drukste moment, een minuut tijdens een piekuur op een drukke dag, onder de 0,71 blijft. Je kunt hierbij gebruikmaken van de tabel op de uitwerkbijlage.

uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________________ Kandidaatnummer _____________

4

totaal aantal voetgangers (museumbezoekers en passanten samen)					
Aantal per / Op een…	dag	gemiddeld uur	piekuur	minuut in een gemiddeld uur	minuut in een piekuur
rustige dag					
gemiddelde dag	15 100				
drukke dag					

Gesamtanzahl Fußgänger*innen (Museumsbesucher*innen und Passant*innen zusammen)					
	Anzahl pro Tag	Stunden-durchschnitt	Stoßzeit	Anzahl pro Minute im Stunden-durchschnitt	Anzahl pro Minute in der Stoßzeit
ruhiger Tag					
durchschnittlicher Tag	15 100				
intensiver Tag					

Cupcakes (Lösungen)

Carmen möchte Cupcakes backen (siehe Foto).

Sie verwendet dafür folgende Zutaten:

Für 12 Vanille-Cupcakes:

- 180 Gramm Butter
- 135 Gramm Zucker
- 8 Gramm Vanillezucker
- 4 Eier
- 180 Gramm Mehl mit Backpulver
- 1 Prise Salz

Carmen hat 300 Gramm Zucker und von allen anderen Zutaten genug zuhause. Sie möchte so viel Cupcakes wie möglich backen.

5. **(3 Punkte) Berechnen Sie, wie viele Cupcakes Carmen backen kann.**

Nach dem Rezept müssen die Cupcakes 20 Minuten bei 175 °C gebacken werden. Carmen weiß, dass Cupcakes fertig sind, wenn die Kerntemperatur der Cupcakes 95 °C beträgt.

Carmen geht daher davon aus, dass die Kerntemperatur von Cupcakes in 20 Minuten von Raumtemperatur (20 °C) auf 95 °C steigt. Wenn dieser Anstieg exponentiell erfolgt, ergibt das folgende Formel:

$$K = 1{,}081^t, \qquad \text{mit der Kerntemperatur } K \text{ zur Zeit } t \text{ in Minuten.}$$

Dabei ist $t = 0$ der Zeitpunkt, an dem die Cupcakes in den Ofen kommen.

Der Wachstumsfaktor 1,081 in der Formel wurde auf drei Dezimalstellen gerundet.

6. **(3 Punkte) Berechnen Sie den Wert dieses Wachstumsfaktors auf fünf Dezimalstellen genau.**

Carmen fragt sich, ob sie annehmen hätte können, dass die Kerntemperatur linear ansteigt. Sie möchte untersuchen, welches Modell am besten passt: das lineare oder das zuvor verwendete exponentielle Modell. Zu diesem Zweck misst Carmen nach 12 Minuten die Kerntemperatur ihrer Cupcakes. Diese scheint 52 °C zu sein.

7. **(4 Punkte) Untersuchen Sie, ob das lineare oder das exponentielle Modell besser zu dieser Beobachtung passt.**

Die amerikanische Firma *Tasty Layers* hat sich darauf spezialisiert, aus Cupcakes sehr hohe und große Türme herzustellen. Für große Partys und Hochzeiten stellt *Tasty Layers* Türme mit Hunderten von Cupcakes her.

Im untenstehenden Foto sehen Sie ein Beispiel für so einen Turm. Der Turm im Foto hat 9 Schichten.

Um zu berechnen, wie viele Cupcakes (ungefähr) auf diesem Turm sind, verwenden wir das folgende Modell:

$$\begin{cases} A_n = 1{,}4 \cdot A_{n-1} \\ A_1 = 6 \end{cases}$$

In dieser Formel ist A_n eine Annäherung an die Anzahl der Cupcakes auf der n-ten Schicht, wobei $n = 1$ für die oberste Schicht gilt.

Da es natürlich eine ganze Zahl von Cupcakes auf jeder Schicht gibt, müssen wir die Werte von A_n auf gewohnte Weise auf ganze Zahlen runden. Da $A_2 = 8{,}4$ ist, werden 8 Cupcakes auf die zweite Schicht gelegt, und weil $A_3 = 1{,}4 \cdot 8{,}4 = 11{,}76$, werden 12 Cupcakes auf die dritte Schicht gelegt. Und so weiter. Für die obersten fünf Schichten erhalten Sie beispielsweise 6, 8, 12, 16 und 23 Cupcakes, also insgesamt 65 Cupcakes.

Tatsächlich stehen 300 Cupcakes auf dem Turm.

8. **(4 Punkte) Berechnen Sie, wie viele Cupcakes das Modell von der Realität abweicht.**

Für eine große Firmenfeier wird *Tasty Layers* beauftragt, einen Turm mit 1000 Cupcakes zu machen. Für diesen Auftrag verwendet das Unternehmen einen Turm mit 6 Cupcakes auf der obersten Schicht und immer 18 Cupcakes mehr auf jeder darunterliegenden Schicht. Wir wählen wieder $n = 1$ für die oberste Schicht.

9. **(4 Punkte) Stellen Sie eine Formel für die Anzahl der Cupcakes auf der jeweils nächsten Schicht auf und berechnen Sie, ab welcher Schicht sich mehr als 160 Cupcakes auf einer Schicht befinden.**

Cupcakes

Carmen gaat cupcakes (zie foto 1) bakken.

foto 1

Zij gebruikt daarvoor de onderstaande ingrediënten:

Voor 12 vanille cupcakes
- 180 gram boter
- 135 gram suiker
- 8 gram vanillesuiker
- 4 eieren
- 180 gram zelfrijzend bakmeel
- snufje zout

Carmen heeft 300 gram suiker in huis en van alle andere ingrediënten heeft ze ruim voldoende. Ze wil zo veel mogelijk cupcakes bakken.

3p **5** Bereken hoeveel cupcakes Carmen maximaal kan bakken.

Volgens het recept moeten de cupcakes 20 minuten gebakken worden op een temperatuur van 175 °C . Carmen weet dat cupcakes gaar zijn als de kerntemperatuur van de cupcakes 95 °C is.

Carmen veronderstelt daarom dat de kerntemperatuur van cupcakes in 20 minuten van kamertemperatuur (20 °C) stijgt naar 95 °C. Als deze toename exponentieel verloopt, dan hoort daar de volgende formule bij:

$K = 20 \cdot 1{,}081^t$, met K de kerntemperatuur en t de tijd in minuten.

Hierbij is $t = 0$ het tijdstip waarop de cupcakes de oven ingaan.

De groeifactor 1,081 in de formule is afgerond op drie decimalen.

3p **6** Bereken de waarde van deze groeifactor in vijf decimalen nauwkeurig.

Carmen vraagt zich af of ze ook had kunnen aannemen dat de kerntemperatuur lineair stijgt. Ze wil onderzoeken welk model het beste past: het lineaire of het eerder gebruikte exponentiële model. Daartoe meet Carmen na 12 minuten de kerntemperatuur van haar cupcakes. Deze blijkt 52 °C te zijn.

4p **7** Onderzoek of het lineaire of het exponentiële model het beste past bij deze waarneming.

lees verder ►►►

Het Amerikaanse bedrijf Tasty Layers heeft zich gespecialiseerd in het maken van heel hoge en grote torens van cupcakes. Voor grote feesten en bruiloften maakt Tasty Layers bouwwerken met daarop honderden cupcakes.

foto 2

Op foto 2 zie je een voorbeeld van zo'n bouwwerk. De toren op foto 2 heeft 9 lagen.

Om uit te rekenen hoeveel cupcakes er (ongeveer) op deze toren staan gebruiken we het volgende model:

$$\begin{cases} A_n = 1{,}4 \cdot A_{n-1} \\ A_1 = 6 \end{cases}$$

In deze formule is A_n een benadering van het aantal cupcakes op de n^e laag, met $n = 1$ voor de bovenste laag.

Omdat er natuurlijk op iedere laag een geheel aantal cupcakes staat, moeten we de waarden van A_n op de gebruikelijke manier op helen afronden. Omdat $A_2 = 8{,}4$ komen er 8 cupcakes op de tweede laag, en omdat $A_3 = 1{,}4 \cdot 8{,}4 = 11{,}76$ komen er dus 12 cupcakes op de derde laag. Enzovoort.
Zo krijg je voor de bovenste vijf lagen 6, 8, 12, 16 en 23 cupcakes, dus in totaal 65 cupcakes.

In werkelijkheid staan er 300 cupcakes op de toren.

4p **8** Bereken hoeveel cupcakes het model afwijkt van de werkelijkheid.

Voor een groot bedrijfsfeest krijgt Tasty Layers de opdracht een cupcaketoren te maken met daarop 1000 cupcakes. Het bedrijf gebruikt voor deze opdracht een toren met op de bovenste laag 6 cupcakes en op elke volgende laag 18 cupcakes meer. We nemen weer $n = 1$ voor de bovenste laag.

4p **9** Stel een formule op voor het aantal cupcakes op de n^e laag en bereken daarmee vanaf welke laag er meer dan 160 cupcakes op een laag staan.

Weniger Studienanfänger*innen im Grundschullehramt (Lösungen)

Der folgende Text basiert auf einem Artikel aus dem Bildungsmagazin des *Algemene Onderwijsbond* vom Februar 2016.

> Für das Grundschullehramtsstudium haben sich durchschnittlich um ein Drittel weniger Studienanfänger*innen eingeschrieben. Die Fachhochschule Den Haag, wo der Zustrom nach Angaben der Vereinigung der Fachhochschulen um 58 % sinkt, ist davon besonders betroffen. Das Bildungsmagazin hatte aufgrund der vielen Zulassungstests bereits einen starken Rückgang der Grundschullehramtsstudierenden prognostiziert. Letztendlich verzeichneten die Studien für das Grundschullehramt 1820 Studienanfänger*innen weniger, das ist ein Rückgang von 32 Prozent. Ministerin Jet Bussemaker ist nicht überrascht. Sie macht die Abschaffung des Stipendiums und die strengeren Anforderungen an die Studierenden für den Rückgang verantwortlich.

Der Artikel spricht von einem Rückgang der Neulinge im Jahr 2015 um 32 % gegenüber dem Vorjahr.

10. (3 Punkte) Berechnen Sie die Anzahl der Studienanfänger*innen im Jahr 2014. Runden Sie Ihre Antwort auf Zehner.

Betrachten wir den letzten Satz des Artikels. Dazu führen wir folgende Abkürzungen ein:
D: Verringerung der Anzahl neuer Studienanfänger*innen
A: Abschaffung des Stipendiums
S: strengere Anforderungen an die Studierenden im Grundschullehramt

Nehmen wir jetzt an, dass Ministerin Bussemaker mit dem Wort „und“ meint, dass die Abschaffung des Stipendiums in Kombination mit den strengeren Anforderungen an die Studierenden im Grundschullehramt zu einem Rückgang der Zahl der Studienanfänger*innen führen wird.

11. (2 Punkte) Schreiben Sie die Erklärung von Ministerin Bussemaker mit logischen Symbolen und den obigen Abkürzungen.

Nach der Erklärung von Ministerin Bussemaker vermuteten einige Studierende im Grundschullehramt, dass Folgendes zutreffen würde: $(A \Rightarrow D) \Rightarrow V$
Die Abkürzung V bedeutet dabei: Die Studiengebühr wird reduziert.

12. (2 Punkte) Übersetzen Sie die logische Aussage in Worte.

Bei einigen Studienrichtungen im Grundschullehramt erhalten die Studierenden zu Beginn ihres ersten Jahres einen Mathematik-Test. Wenn sie ihn nicht bestehen erhalten sie vor dem Sommer einen neuen Einstufungstest. Wenn sie diesen nicht bestehen, dürfen sie nicht ins zweite Studienjahr vorrücken. Wir führen wieder Abkürzungen ein:

R: Mathematik-Test bestanden

O: Übertragung in das zweite Jahr

13. (3 Punkte) Untersuchen Sie, ob $R \Rightarrow O$ aus dem obigen Text folgt.

Daling nieuwe eerstejaars pabo's

De onderstaande tekst is gebaseerd op een artikel van februari 2016 uit het Onderwijsblad van de Algemene Onderwijsbond.

> De pabo's krijgen gemiddeld een derde minder nieuwe eerstejaars binnen. Schrijnend is de situatie bij de Haagse Hogeschool waar, volgens de cijfers van Vereniging Hogescholen, de instroom keldert met 58%.
> Het Onderwijsblad voorspelde al een flinke duikeling bij de pabo's door de vele toelatingstoetsen. Uiteindelijk noteren de pabo's 1820 nieuwe eerstejaars minder, een daling van 32 procent.
> Minister Jet Bussemaker is niet verrast. Zij wijt de daling aan de afschaffing van de studiebeurs en de strengere eisen op de pabo's.

Het artikel spreekt van een daling van 32% nieuwe eerstejaars in 2015 ten opzichte van het jaar ervoor.

3p **10** Bereken het aantal nieuwe eerstejaars in 2014. Rond je antwoord af op tientallen.

We kijken nu naar de laatste zin van het artikel.
Hiervoor introduceren we de volgende afkortingen:
D: daling van het aantal nieuwe eerstejaars
A: afschaffing van de studiebeurs
S: strengere eisen op de pabo's

Stel nu dat minister Bussemaker met het woordje 'en' bedoelt dat de afschaffing van de studiebeurs **in combinatie** met de strengere eisen op de pabo's zorgt voor een daling van het aantal nieuwe eerstejaars.

2p **11** Schrijf dan de uitspraak van minister Bussemaker met behulp van logische symbolen en bovenstaande afkortingen.

Naar aanleiding van de uitspraak van minister Bussemaker vermoedde men op sommige pabo's dat het volgende zou gaan gelden: $(A \Rightarrow D) \Rightarrow V$
Hierin betekent de afkorting V: het collegegeld wordt verlaagd.

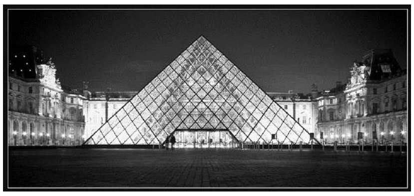
2p **12** Vertaal de bewering $(A \Rightarrow D) \Rightarrow V$ in een gewone zin.

Bij sommige pabo's krijgen studenten aan het begin van hun eerste jaar een rekentoets. Bij een onvoldoende worden ze in de loop van het eerste jaar bijgespijkerd en krijgen ze voor de zomer een nieuwe rekentoets. Als ze hier niet voor slagen, mogen ze niet door naar het tweede jaar.
We introduceren weer afkortingen:
R: slagen voor rekentoets
O: overgaan naar tweede jaar

3p **13** Onderzoek of $R \Rightarrow O$ volgt uit de tekst hierboven.

Verschwundene Pyramide? (Lösungen)

Auf der Abbildung unten ist die Louvre-Pyramide, die als Eingang zum Museum dient. Diese ist eine regelmäßige vierseitige Pyramide mit Seitenflächen aus rautenförmigen und dreieckigen Glasscheiben.



Manche behaupten, dass insgesamt 666 Glasscheiben in die Wände eingearbeitet wurden. Dies ist jedoch nicht korrekt. Die drei Seitenflächen ohne Eingang haben jeweils 18 dreieckige Paneele unten und 17 Reihen rautenförmiger Paneele oben. Der Boden dieser 17 Reihen hat 17 rautenförmige Platten und die Reihen darüber haben je eine Platte weniger. Die vierte Seitenfläche ist genauso aufgebaut, hat aber 2 dreieckige und 9 rautenförmige Paneele weniger, da eine Öffnung für den Eingang vorhanden ist. Für die Summe der Zahlen 1 bis n gilt folgende Formel:

$$\text{Summe} = \frac{1}{2} n \ (1 + n)$$

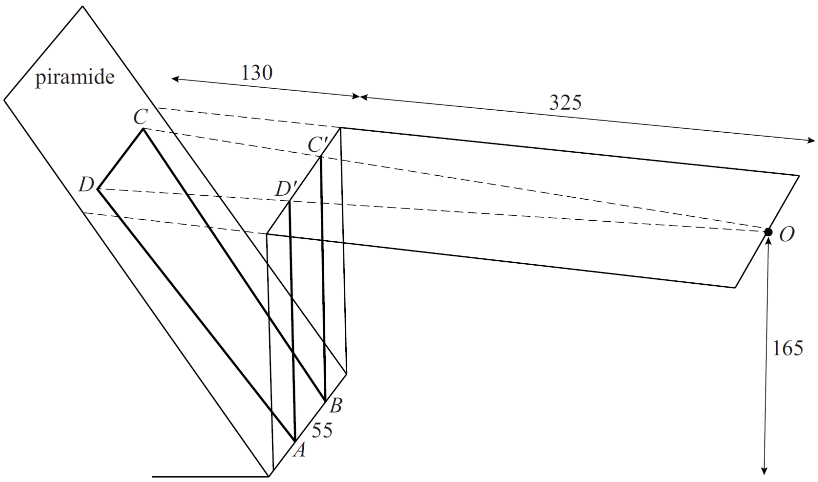
14. (3 Punkte) Berechnen Sie die Gesamtzahl der Glasscheiben in den Wänden der Pyramide.

Im Juni 2016 ließ der französische Künstler *JR* die Vorderseite der Pyramide mit einem riesigen Foto des Gebäudes hinter der Pyramide bedecken. Siehe dazu die Abbildungen unten.

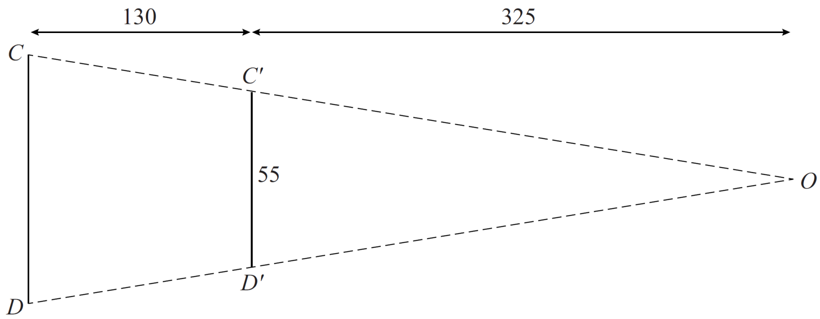
Genau dort, wo das untenstehende Foto aufgenommen wurde, schien die Pyramide verschwunden zu sein. Der Fotograf dieses Fotos war nicht genau an diesem Ort, da das Foto auf der Pyramide nicht genau zum Gebäude dahinter passt.

15. (3 Punkte) Erklären Sie anhand einer Skizze der Seitenansicht, ob der Fotograf des unten abgebildeten Fotos näher an der Pyramide war als der Ersteller des Fotos rechts oben oder ob er weiter entfernt war.

Wenn die Vorderseite der Pyramide vertikal gewesen wäre, hätte der Künstler das Foto des Gebäudes einfach auf diese vertikale Wand kleben können. Da die Vorderseite der Pyramide geneigt ist, musste er das Foto bearbeiten, um den richtigen Effekt zu erzielen. Um sich einen Eindruck davon zu verschaffen, zeigt die Abbildung unten eine vereinfachte Situation. Das Viereck $ABCD$ auf der Pyramide wird vom Auge als vertikal stehendes Rechteck $ABC'D'$ wahrgenommen.



Das Auge befindet sich in Punkt O auf 165 cm Höhe. Die Ebene durch O, C, D, C' und D' ist horizontal. In der Skizze unten ist diese Ebene separat mit den angegebenen Abmessungen in cm gezeichnet.



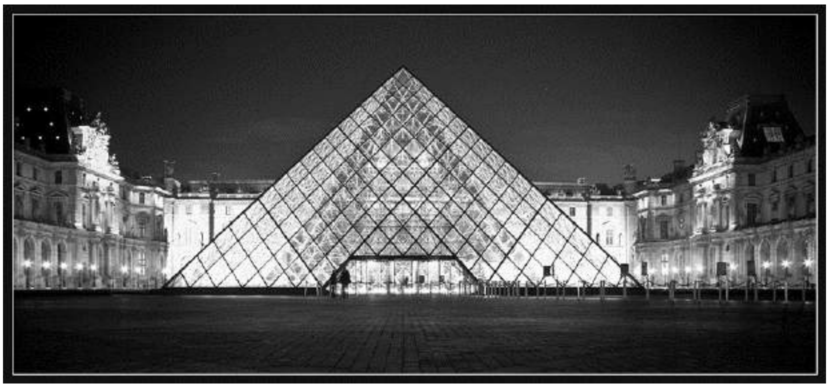
In der Beilage hat man mit der Zeichnung des viereckigen $ABCD$ im Maßstab 1 : 20 begonnen.

16. (6 Punkte) Vervollständigen Sie die Skizze in der Beilage. Erläutern Sie Ihr Ergebnis mit Berechnungen.

Verdwenen piramide?

Op foto 1 zie je de piramide van het Louvre, die fungeert als ingang voor het museum. Het is een regelmatige vierzijdige piramide met zijvlakken die bestaan uit ruitvormige en driehoekige glazen panelen.

foto 1



Sommige mensen beweren dat er in totaal 666 glazen panelen in de wanden verwerkt zijn. Dit is echter niet juist. De drie zijvlakken zonder ingang hebben aan de onderkant elk 18 driehoekige panelen en daarboven 17 rijen ruitvormige panelen. De onderste van deze 17 rijen heeft 17 ruitvormige panelen en de rijen daarboven hebben telkens één paneel minder.
Het vierde zijvlak is op dezelfde manier opgebouwd, maar het heeft 2 driehoekige en 9 ruitvormige panelen minder doordat daar een opening is voor de ingang.
Voor de som van de getallen 1 tot en met n geldt de volgende formule:

$$som = \tfrac{1}{2}n(1+n)$$

3p **14** Bereken het totale aantal glazen panelen in de wanden van de piramide.

In juni 2016 liet de Franse kunstenaar JR het voorste zijvlak van de piramide beplakken met een reusachtige foto van het gebouw dat zich achter de piramide bevindt. Zie foto's 2 en 3.

foto 2

lees verder ►►►

foto 3

Precies vanaf de plek waar foto 3 is gemaakt, leek het net alsof de piramide verdwenen was. De maker van foto 4 stond niet precies op deze plek, want de foto op de piramide sluit niet precies aan bij het gebouw daarachter.

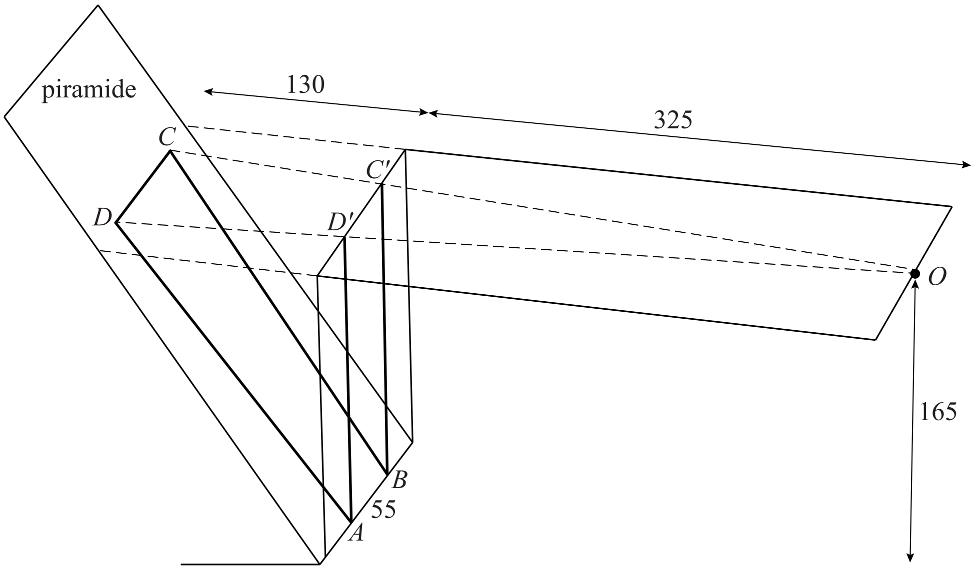
foto 4

3p **15** Leg met behulp van een schets van het zijaanzicht van de situatie uit of de maker van foto 4 dichter bij de piramide stond dan de maker van foto 3 of juist verder weg.

lees verder ►►►

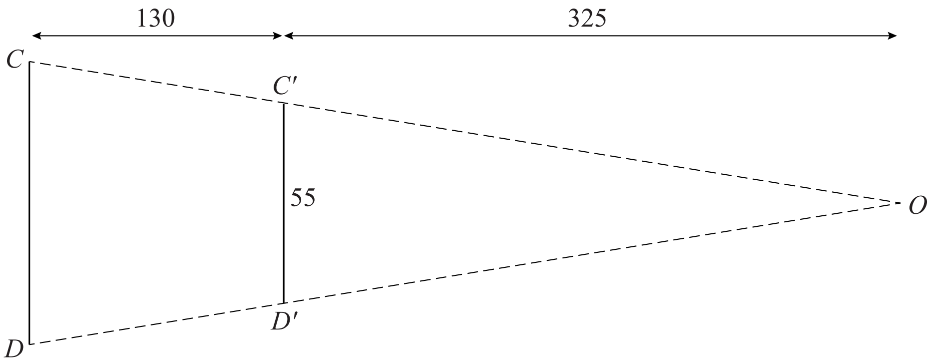
Als het voorste zijvlak van de piramide verticaal was geweest, had de kunstenaar de foto van het gebouw gewoon vergroot op die verticale wand kunnen plakken. Omdat het voorste zijvlak van de piramide schuin is, moest hij de foto bewerken om het juiste effect te krijgen. Om hiervan een indruk te krijgen is in figuur 1 een vereenvoudigde situatie weergegeven. De vierhoek $ABCD$ op de piramide wordt door het oog waargenomen als de verticaal staande rechthoek $ABC'D'$.

figuur 1



Het oog bevindt zich op 165 cm hoogte in punt O. Het vlak door O, C, D, C' en D' is horizontaal. In figuur 2 is dit vlak apart getekend met daarin aangegeven de maten in cm.

figuur 2



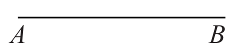
Op de uitwerkbijlage is een begin gemaakt met de tekening van vierhoek $ABCD$ op schaal 1:20.

6p **16** Maak de tekening op de uitwerkbijlage af. Licht je antwoord toe met berekeningen.

uitwerkbijlage

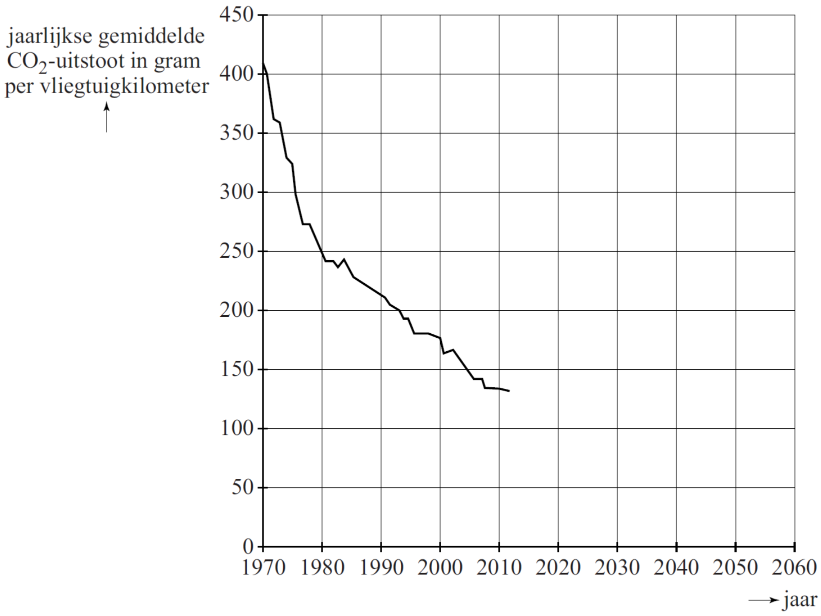
Naam kandidaat ______________________________ Kandidaatnummer _____________

16



Das neue Fliegen (Lösungen)

Flugzeuge stoßen viel umweltschädliches CO_2 aus. Daher kann die Luftfahrt einen wichtigen Beitrag zur Reduzierung der CO_2-Emissionen leisten. Die CO_2-Emissionen von Flugzeugen werden in Gramm CO_2 pro sogenanntem Flugzeugkilometer gemessen. Ein **Flugzeugkilometer** ist ein Kilometer, den ein Fluggast zurücklegt.
Die Abbildung unten zeigt die jährlichen durchschnittlichen CO_2-Emissionen pro Flugzeugkilometer ab dem Jahr 1970.



Die Abbildung zeigt, dass die jährlichen durchschnittlichen CO_2-Emissionen pro Flugzeugkilometer seit 1970 stark gesunken sind.

Im Zeitraum von 1980 bis 2010 verringerte sich der mittlere jährliche CO_2-Ausstoß pro Flugzeugkilometer nahezu linear von 250 auf 135 Gramm.

Angenommen dieser lineare Rückgang setzt sich auf diese Weise fort.

17. (3 Punkte) Berechnen Sie, in welchem Jahr die mittlere jährliche CO_2-Emission pro Flugzeugkilometer zum ersten Mal unter 50 Gramm fallen wird.

Es ist unwahrscheinlich, dass die Emissionen weiter linear sinken. Ein realistischeres Modell geht von einer Abnahme aus, die solange abnimmt, bis ein bestimmter Grenzwert erreicht ist. Hierfür gilt die Formel:

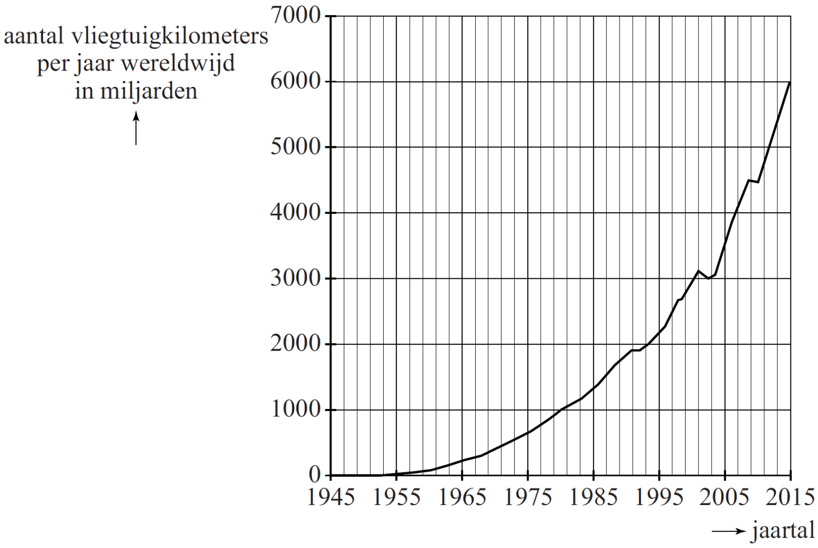
$$C = 40 + a \cdot b^t$$

C ist der jährliche durchschnittliche CO_2-Ausstoß pro Flugzeugkilometer in Gramm und t in Jahren mit $t = 0$ im Jahr 1980.

18. (4 Punkte) Berechnen Sie die Werte von a und b, um dieses Modell gemäß den zuvor in den Jahren 1980 und 2010 angegebenen Werten zu erhalten. Geben Sie in Ihrem Ergebnis a auf eine ganze Zahl und b auf drei Dezimalstellen gerundet an.

Die obenstehende Abbildung zeigt deutlich, dass der anfänglich starke Rückgang in den 1970er Jahren immer geringer wurde. Aus diesem Grund verwenden wir auch ein Modell, bei dem die mittleren jährlichen CO_2-Emissionen pro Flugzeugkilometer im Zeitraum von 1970 bis 2010 exponentiell um 2,7 % pro Jahr gesunken sind.

Diese Abnahme hat nicht den gewünschten Effekt. Die Anzahl der Flugzeugkilometer pro Jahr nehmen exponentiell zu. Siehe dazu die Abbildung unten. Und wenn die Anzahl der Flugzeugkilometer pro Jahr wie in den letzten Jahrzehnten weiter steigt, werden die jährlichen CO_2-Gesamtemissionen nicht sinken, sondern weiter zunehmen.



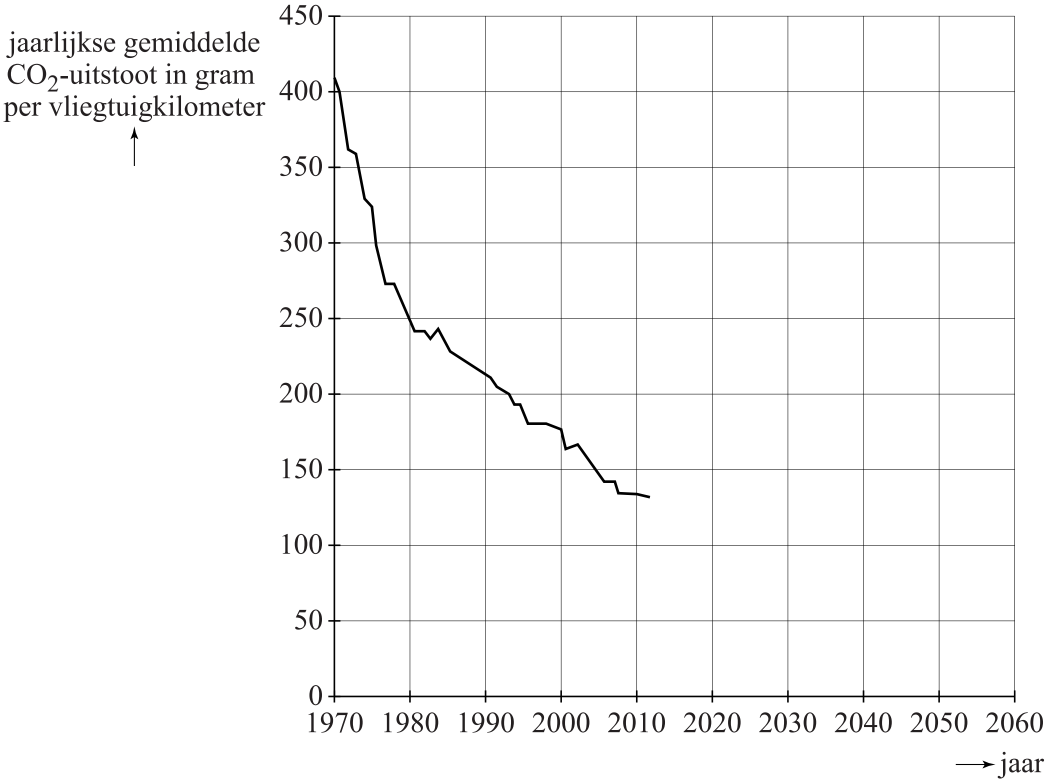
Nehmen wir an, dass die Anzahl der Flugzeugkilometer pro Jahr wie im Zeitraum von 1980 bis 2015 in der Abbildung exponentiell weiter zunimmt und dass die jährlichen durchschnittlichen CO_2-Emissionen pro Flugzeugkilometer weiterhin um 2,7 % pro Jahr sinken.

19. (6 Punkte) Berechnen Sie, um wie viel Prozent pro Jahr sich die jährlichen CO_2-Emissionen in den kommenden Jahren erhöhen werden. Runden Sie das Ergebnis auf eine Dezimalstelle.

Het nieuwe vliegen

Vliegtuigen stoten veel vervuilend CO_2 uit. Daarom moet de luchtvaart een belangrijke bijdrage leveren aan de vermindering van de CO_2-uitstoot. De CO_2-uitstoot van vliegtuigen wordt gemeten in gram CO_2 per zogeheten vliegtuigkilometer. Een **vliegtuigkilometer** is een afgelegde kilometer door een vliegtuigpassagier.
In figuur 1 zie je vanaf het jaar 1970 de jaarlijkse gemiddelde CO_2-uitstoot per vliegtuigkilometer.

figuur 1



In figuur 1 is te zien dat de jaarlijkse gemiddelde CO_2-uitstoot per vliegtuigkilometer sinds 1970 sterk daalt.

In de periode van 1980 tot 2010 is de jaarlijkse gemiddelde CO_2-uitstoot per vliegtuigkilometer vrijwel lineair gedaald van 250 tot 135 gram.

Neem aan dat deze lineaire daling zich zo voortzet.

3p **17** Bereken in welk jaar de jaarlijkse gemiddelde CO_2-uitstoot per vliegtuigkilometer dan voor het eerst onder de 50 gram zal komen.

lees verder ►►►

Het is niet waarschijnlijk dat de uitstoot lineair zal blijven dalen. Een realistischer model gaat uit van een daling die telkens minder sterk wordt tot een zekere grenswaarde is bereikt. Hiervoor geldt de formule:

$$C = 40 + a \cdot b^t$$

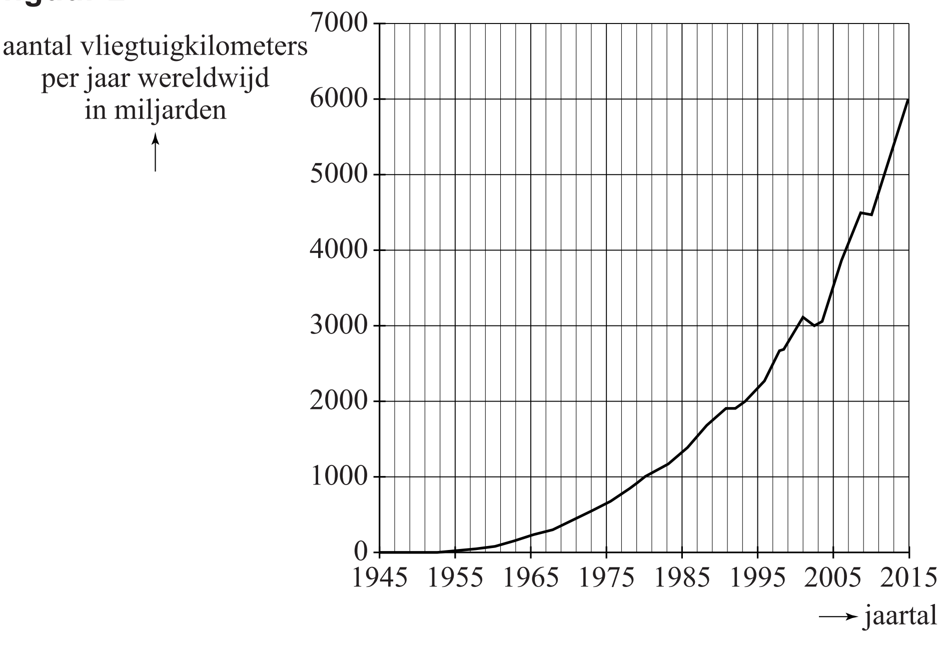
Hierbij is C de jaarlijkse gemiddelde CO_2-uitstoot per vliegtuigkilometer in grammen en t in jaren met $t = 0$ in 1980.

4p **18** Bereken de waarden van a en b om dit model in overeenstemming te krijgen met de eerder gegeven waarden in 1980 en 2010. Geef in je antwoord a als een geheel getal en b afgerond op drie decimalen.

In figuur 1 is goed te zien dat de aanvankelijk sterke daling van de jaren 70 steeds minder werd. Daarom wordt ook wel gerekend met een model waarin de jaarlijkse gemiddelde CO_2-uitstoot per vliegtuigkilometer in de periode van 1970 tot 2010 exponentieel is gedaald met 2,7% per jaar.

Deze daling zal niet het gewenste effect hebben. Het aantal vliegtuigkilometers per jaar stijgt exponentieel. Zie figuur 2. En als het aantal vliegtuigkilometers per jaar blijft stijgen zoals het de afgelopen decennia heeft gedaan, zal de totale jaarlijkse CO_2-uitstoot niet dalen maar blijven toenemen.

figuur 2



Neem aan dat het aantal vliegtuigkilometers per jaar exponentieel blijft toenemen zoals in de periode van 1980 tot 2015 in figuur 2 en dat de jaarlijkse gemiddelde CO_2-uitstoot per vliegtuigkilometer blijft dalen met 2,7% per jaar.

6p **19** Bereken met hoeveel procent per jaar de totale jaarlijkse CO_2-uitstoot dan stijgt in de komende jaren. Rond je antwoord af op één decimaal.

Schildkröten (Lösungen)

Manche Menschen haben eine Schildkröte als Haustier. Bestimmte Arten überwintern unter natürlichen Bedingungen. Der Besitzer kann seine Schildkröte in den Winterschlaf versetzen, andernfalls muss er seinem Haustier den ganzen Winter über zusätzliches Licht und Wärme geben. Eine Schildkröte muss zu Beginn ihres Winterschlafes ein gesundes Gewicht haben, sonst besteht die Möglichkeit, dass sie nicht überlebt. Das **Jackson-Verhältnis** wird häufig verwendet, um festzustellen, ob die Schildkröte ein gesundes Gewicht hat.

Das Jackson-Verhältnis R wird mit folgender Formel berechnet:

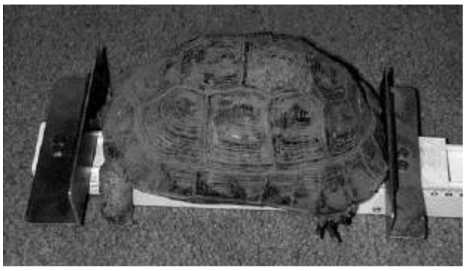
$$R = \frac{G}{L^3}$$

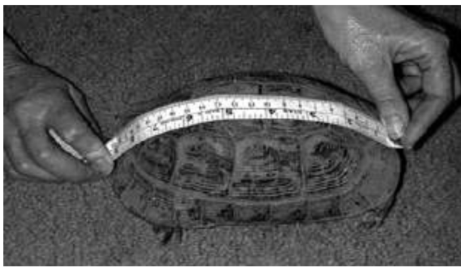
Dabei ist G das Gewicht der Schildkröte in g und L die Länge des Schildkrötenpanzers in cm.
Für die griechische Schildkröte gilt folgende Faustregel: Eine Schildkröte kann sicher überwintern, wenn ihr Jackson-Verhältnis zwischen 0,18 und 0,22 liegt.

Jesse hat eine griechische Schildkröte mit einer Schildlänge von 15 cm und möchte sie überwintern lassen.

18. (3 Punkte) Berechnen Sie auf ganze Gramm genau, zwischen welchen Werten ihr Gewicht nach der Faustregel liegen kann.

Die Länge des Schildes muss gerade gemessen werden, indem beispielsweise die Schildkröte mit dem zurückgezogenen Kopf zwischen einen Bremssattel gelegt wird (siehe linkes Foto). Angenommen, jemand misst trotzdem die Länge über dem Schild (siehe rechtes Foto).





19. (3 Punkte) Argumentieren Sie, ob eine Schildkröte ein größeres oder kleineres Jackson-Verhältnis als das tatsächliche erhält, wenn Sie auf diese Weise messen.

Auf einer englischen Website heißt es: Wenn Sie das Gewicht in Englischen Pfund (lbs) und die Schildlänge in Zoll messen, kann das Jackson-Verhältnis anhand folgender Formel berechnet werden:

$$R = c \cdot \frac{W}{l^3}$$

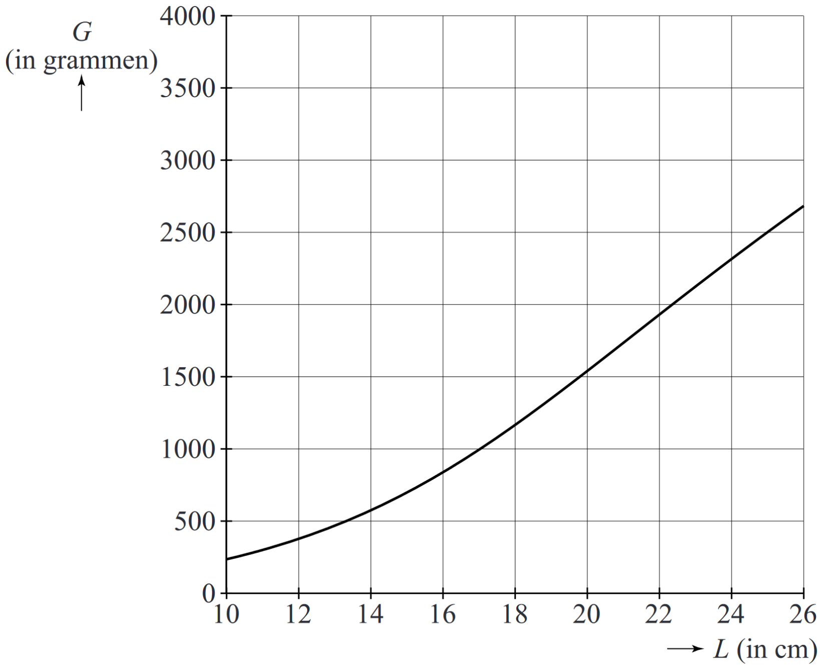
Dabei ist W das Gewicht in Englischen Pfund und l die Schildlänge in Zoll.

1 Englisches Pfund (lb) $\approx$ 454 g und 1 Zoll = 2,54 cm

Das Jackson-Verhältnis muss daher auch den gleichen Wert ergeben.

20. (3 Punkte) Berechnen Sie den Wert von c in dieser Formel. Geben Sie das Ergebnis auf eine Dezimalstelle gerundet an.

Eine andere Möglichkeit, um festzustellen, ob eine griechische Schildkröte sicher überwintern kann, ist die Verwendung der Grafik in der folgenden Abbildung. Die Grafik zeigt das Gewicht gesunder Schildkröten als Funktion der Schildlänge. Befindet sich eine Schildkröte mit ihrer Größe und ihrem Gewicht in der Nähe dieser Werte, kann sie sicher in den Winterschlaf versetzt werden.



Wir fragen uns, ob sich der Graph der Figur der oben genannten Faustregel annähert. Um dies zu untersuchen, können wir in der Abbildung Linien der oberen und unteren Grenzen zeichnen, die der oben genannten Faustregel zugeordnet sind, und dann den Bereich angeben, der dieser Faustregel im Koordinatensystem zugeordnet ist. Das Koordinatensystem befindet sich auch in der Beilage.

21. (6 Punkte) Geben Sie im Koordinatensystem in der Beilage den Bereich an, in dem sich eine Schildkröte gemäß der Faustregel mit ihrer Schildlänge und ihrem Gewicht befinden muss, um einen sicheren Winterschlaf zu beginnen.

Schildpadden

Sommige mensen hebben een schildpad als huisdier. Bepaalde soorten houden onder natuurlijke omstandigheden een winterslaap. De eigenaar kan ervoor kiezen om zijn schildpad ook in winterslaap te laten gaan, omdat hij anders de hele winter extra licht en warmte moet geven aan zijn huisdier. Een schildpad moet een gezond gewicht hebben bij het begin van zijn winterslaap, anders is er een kans dat hij het niet overleeft. Om vast te stellen of de schildpad een gezond gewicht heeft, wordt vaak de **Jackson Ratio** gebruikt.

De Jackson Ratio R wordt berekend met de formule $R = \dfrac{G}{L^3}$.

Hierin is G het gewicht van de schildpad in gram en L de lengte van het schild van de schildpad in cm.
Voor de Griekse landschildpad geldt de volgende vuistregel: een schildpad kan veilig aan een winterslaap beginnen als zijn Jackson Ratio tussen 0,18 en 0,22 ligt.

Jesse heeft een Griekse landschildpad met een schildlengte van 15 cm en wil hem een winterslaap laten houden.

3p **18** Bereken in hele grammen nauwkeurig tussen welke waarden zijn gewicht dan mag liggen volgens de vuistregel.

De lengte van het schild moet recht gemeten worden, bijvoorbeeld door de schildpad met ingetrokken kop tussen een schuifmaat te zetten (zie foto 1). Veronderstel dat iemand toch de lengte over het schild heen meet (zie foto 2).

foto 1

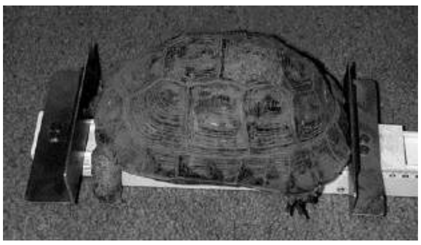
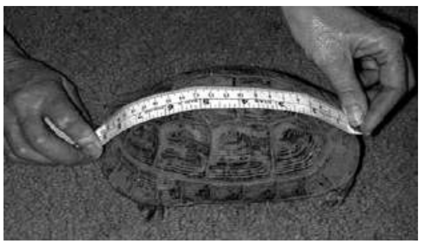


foto 2



3p **19** Beredeneer of een schildpad door op die manier te meten een grotere of een kleinere Jackson Ratio krijgt dan hij in werkelijkheid heeft.

lees verder ►►►

Op een Engelse website staat het volgende: als je het gewicht meet in Engelse ponden (lbs) en de schildlengte in inches, kun je de Jackson Ratio berekenen met de formule $R = c \cdot \frac{W}{l^3}$.

Hierin is W het gewicht in Engelse ponden en l de schildlengte in inches.

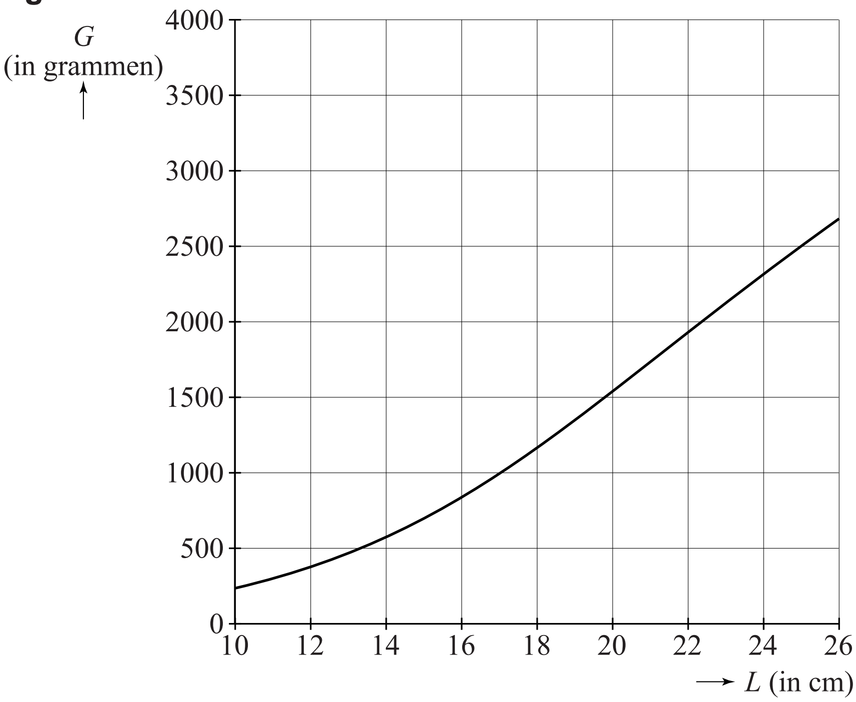
1 Engels pond (lb) ≈ 454 gram en 1 inch $= 2{,}54$ cm.

De Jackson Ratio moet dan ook weer dezelfde waarde opleveren.

3p **20** Bereken de waarde van c in deze formule. Rond je antwoord af op één decimaal.

Een andere manier om te bepalen of een Griekse landschildpad veilig aan een winterslaap kan beginnen, is met behulp van de grafiek in onderstaande figuur. De grafiek geeft het gewicht van gezonde schildpadden als functie van de schildlengte. Als een schildpad met zijn lengte en gewicht in de buurt van deze grafiek zit, is het veilig om hem in winterslaap te laten gaan.

figuur



We vragen ons af of de grafiek van de figuur bij benadering overeenstemt met de eerder genoemde vuistregel. Om dit te onderzoeken kunnen we in de figuur de grafieken tekenen van de onder- en de bovengrens die horen bij de eerder genoemde vuistregel en vervolgens het gebied dat hoort bij die vuistregel in de figuur aangeven. De figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

6p **21** Geef in de figuur op de uitwerkbijlage het gebied aan waarin een schildpad zich volgens de vuistregel met zijn schildlengte en gewicht moet bevinden om veilig aan een winterslaap te kunnen beginnen.

uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________________ Kandidaatnummer _____________

21