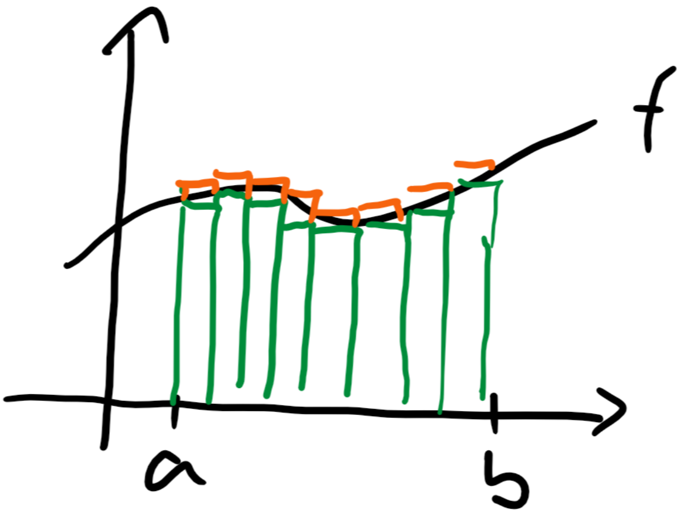
Ein Haufen Aufgaben rund um Integralrechnung & HDI



Inhaltsverzeichnis

Erstellt von Felix Heistinger (Version vom 6. April 2021)

1 Unter- und Obersummen

a) Erkläre möglichst anschaulich, weshalb und wogegen die Folge $\langle a_n \rangle$ konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ und a der Grenzwert der Folge. Gib einen Index $n(\varepsilon)$ an, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n(\varepsilon)$.

$$\text{i)}\quad a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 \qquad \text{ii)}\quad a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot e^{-\frac{k}{n}} \qquad \text{iii)}\quad a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2 + n^2}$$

Aufgabe 3.5.a), e) & f) (AS Calculus)

b) Du weißt, dass

$$\ln(2) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

Erkläre mithilfe dieses Wissens anschaulich, warum der folgende Zusammenhang gilt:

$$0 < \ln(2) - \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + ... + \frac{1}{199} + \frac{1}{200}\right) < 0,05$$

Aufgabe 5. (Probetest)

2 Stammfunktionen

2.1 Ableitungsregeln *umdrehen*

Finde jeweils eine Funktion F, sodass $F' = f$ gilt.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^4 - 4 \cdot x^3$ Aufgabe 4.1.b) (AS Calculus)

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 32 \cdot (4 \cdot x - 3)^7$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos(5 \cdot x + 13)$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3^x$

e) $f :]0; \infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = \ln(x)$

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ Aufgabe 3.5.e) (AS Calculus)

2.2 Fortgeschrittenes *Basteln*

Bastelanleitung für Stammfunktionen im Fall

$$f(x) = e^{\lambda \cdot x} \cdot p(x)$$

wobei p eine Polynomfunktion ist und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Wir nutzen aus, dass die Ableitung von $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = e^{\lambda \cdot x} \cdot p(x)$ gegeben ist durch $g'(x) = e^{\lambda \cdot x} \cdot q(x)$, wobei p und q Polynomfunktionen gleichen Grades sind (siehe z.B. Aufgabe 1.12. in der AS Calculus).

a) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x) = e^{-x} \cdot (a \cdot x^2 + b \cdot x + c).$$

i) Zeige, dass

$$f'(x) = e^{-x} \cdot \big[-a \cdot x^2 + (2 \cdot a - b) \cdot x + b - c\big].$$

ii) Ermittle eine Stammfunktion von $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = e^{-x} \cdot (x^2 - 3 \cdot x + 1).$$

Aufgabe 4.a) & b) (Test am 24.02.2020)

b) Ermittle eine Stammfunktion von $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = e^{2 \cdot x} \cdot (3 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3).$$

Aufgabe 4.c) (Test am 24.02.2020)

3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

a) Ermittle eine Gleichung der Ableitungsfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \int_0^x \sin^4(t) \cdot e^{t^2} \, \mathrm{d}t.$$

b) Für welchen Wert von $x \in [0; \infty[$ ist der gegebene Ausdruck am größten?

$$\text{i)} \quad \int_x^{2 \cdot x} e^{-t} \, \mathrm{d}t \qquad \text{ii)} \quad \int_x^{x+1} t \cdot e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

Aufgabe 3.1.b) & c) (AS Calculus)

c) Für jede stetige Funktion f und jedes Intervall $[a; b]$ mit $a < b$ (mindestens) eine Stelle $s \in [a; b]$, sodass

$$f(s) \cdot (b - a) = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Beweise diesen **Mittelwertsatz der Integralrechnung** mithilfe des HDI und des MWS der Differentialrechnung.

Aufgabe 5.b) (Test am 11.12.2020)

4 Geometrische Anwendungen

4.1 Flächeninhalte

a) Ermittle den Flächeninhalt des endlichen Bereichs, den der Funktionsgraph mit der x-Achse einschließt.

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 4 \cdot x$

ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + 5 \cdot x^4$ Aufgabe 4.1.c) (AS Calculus)

b) Ermittle den Flächeninhalt des endlichen Bereichs, den die Graphen der Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^3 - 2 \cdot x \quad \text{und} \quad g(x) = 2 \cdot x$$

miteinander einschließen.

4.2 Bogenlänge

Berechne jeweils die Bogenlänge des Graphen der Funktion f.

a) $f : [1; e] \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2}{8} - \ln(x)$

Aufgabe 4.6.c) (AS Calculus)

b) $f : [1; 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^4}{32} + \dfrac{1}{x^2}$

Aufgabe 4.6.a) (AS Calculus)

c) $f : [0; 44] \to \mathbb{R},\ f(x) = x \cdot \sqrt{x}$

Aufgabe 7.2. (AS Integralrechnung)

4.3 Rotationsvolumen

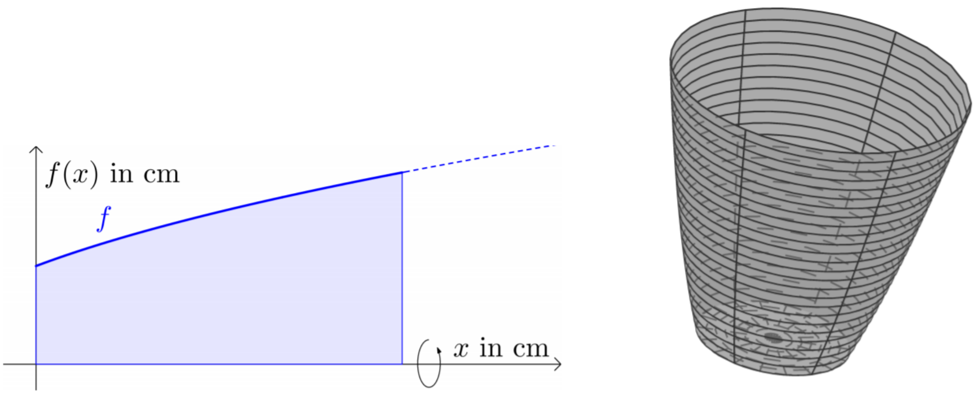
a) Die Innenwand eines Trinkglases entsteht durch Rotation des Graphen der Funktion $f : [0; 12] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sqrt{x+9}$$

um die x-Achse (x und $f(x)$ in cm).

i) Berechne das Fassungsvermögen des Glases.

ii) Wie weit unter dem oberen Rand muss die 0,5 l-Markierung eingezeichnet werden?



Aufgabe 5.2. (AS Integralrechnung)

b) Sei $a > 0$. Das Flächenstück, das vom Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{-x^2}$ gemeinsam mit der x-Achse und den Abszissen $x = 0$ und $x = a$ berandet wird, rotiert um die vertikale Achse. Berechne das Volumen $V(a)$ des entstehenden Rotationskörpers. Zeige, dass

$$\lim_{a \to \infty} V(a) = \pi.$$

Aufgabe 4.7. (AS Calculus)

5 Weitere umgekehrte Kurvenuntersuchungen

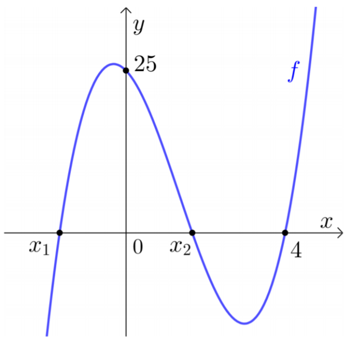
a) Eine kubische Polynomfunktion hat eine einfache Nullstelle bei $x = -1$ und eine doppelte Nullstelle bei $x = 1$. Ihr Graph berandet mt der x-Achse einen Bereich mit orientiertem Flächeninhalt 8. Ermittle eine Gleichung der Polynomfunktion.

Aufgabe 4.10. (AS Calculus)

b) Die dargestellte Polynomfunktion f hat Grad 3. Die Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit den Koordinatenachsen sind unten eingezeichnet. Die Nullstellen x_1 und x_2 liegen symmetrisch zum Koordinatenursprung. Weiters gilt:

$$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$$

Berechne die Nullstellen x_1 und x_2.



Aufgabe 5. (Test am 19.02.2021)