

Analyse von (Un-)Gleichungen

Wie viele Lösungen hat die Gleichung?

a) $x^9 + 5 \cdot x^7 + 3 \cdot x^5 = e^{42\pi}$

b) $x^3 - 3 \cdot x^2 + 1 = 0$

Du darfst dabei dein Wissen über Polynomfunktionen verwenden und auch, dass die Funktion $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) = x^3 - 3 \cdot x^2 + 1$ an der Stelle $x = 0$ ein lokales Maximum und an der Stelle $x = 2$ ein lokales Minimum besitzt.

c) $e^x = x$

d) „Manchmal denkt man, man kann eine Gleichung einfach nicht ohne Technologieunterstützung lösen. Zum Beispiel kommt man bei

$$2^x = 2 \cdot x \Leftrightarrow x = \log_2(2 \cdot x) \Leftrightarrow x = 1 + \log_2(x) \Leftrightarrow \log_2(x) = x - 1$$

durch Umformen einfach nur vom Regen in die Traufe. Wenn man Glück hat, erkennt man aber die Lösung (evtl. sogar von Anfang an) mit freiem Auge.

$$2^x = 2 \cdot x$$

hat zum Beispiel einfach die beiden Lösungen 1 und 2“. Hat man damit sicher alle Lösungen gefunden?

Ungleichungen

a) Zeige, dass die Ungleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt! Für welche x gilt Gleichheit?

$$\frac{3}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}} \leq 1$$

b) Zeige, dass die Ungleichungskette für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt! Für welche x gilt Gleichheit?

$$-\frac{1}{4} \leq \sin^2(x) - \sin(x) \leq 2$$