Wie viele Lösungen hat die Gleichung?

Beim Lösen ‚durch Hinschauen' muss man sich immer fragen:
„Habe ich sicher nichts übersehen?"

Reicht das schon?

Begründe deine Antworten.

a) Felix schaut sich die Gleichung

$$(x-5)^4 - 5\cdot(x-5)^2 + 4 = 0$$

an und sagt: „Ich muss nur schauen, für welche x gilt, dass $x - 5 = \pm 1$, weil dann geht es sich genau aus." Kann sich Felix sicher sein, dass er damit die Gleichung bereits vollständig gelöst hat?

b) „Manchmal denkt man, man kann eine Gleichung einfach nicht ohne Technologieunterstützung lösen. Zum Beispiel kommt man bei

$$2^x = 2\cdot x \quad\Leftrightarrow\quad x = \log_2(2\cdot x) \quad\Leftrightarrow\quad x = 1 + \log_2(x) \quad\Leftrightarrow\quad \log_2(x) = x - 1$$

durch Umformen einfach nur vom Regen in die Traufe. Wenn man Glück hat, erkennt man aber die Lösung (evtl. sogar von Anfang an) mit freiem Auge.

$$2^x = 2\cdot x$$

hat zum Beispiel einfach die beiden Lösungen 1 und 2". Hat man damit sicher alle Lösungen gefunden?

c) Nun möchte Felix einmal einen anderen Lösungsweg für eine quadratische Gleichung ausprobieren. Er schaut sich die Gleichung

$$x^2 - 6\cdot x + 10 = -2\cdot x^2 + 4\cdot x - 3$$

und bringt beide Seiten in Scheitelpunktform. Dabei erhält er

$$(x-3)^2 + 1 = -2\cdot(x-1)^2 - 1$$

und hört auf zu rechnen, weil er meint, die Gleichung hätte eh keine Lösung. Hat er Recht?

Wie viele Lösungen hat die Gleichung?

a) $x^5 + 7 \cdot x^3 + 5 \cdot x = 0$ Bonus: Wie könnten Methoden aus der Differentialrechnung hier hilfreich sein?

b) $x^2 - 1 = k \cdot x$ für beliebiges $k \in \mathbb{R}$

c) $x^3 - 3 \cdot x^2 + 3 = 2$

Du darfst dabei dein Wissen über Polynomfunktionen verwenden und auch, dass die Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = x^3 - 3 \cdot x^2 + 3$ an der Stelle $x = 0$ ein lokales Maximum und an der Stelle $x = 2$ ein lokales Minimum besitzt.