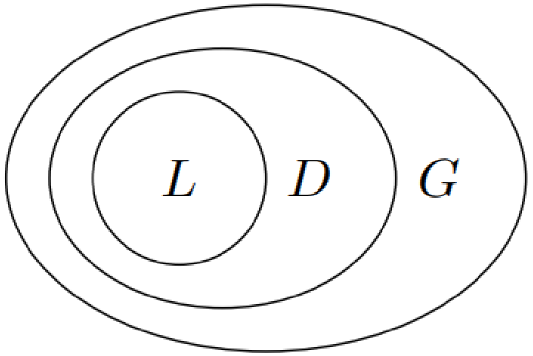
Wir unterscheiden zwischen der **Grundmenge**, der **Definitionsmenge** und der **Lösungsmenge**:

Die **Grundmenge** $\boldsymbol{G}$ enthält alle Zahlen, die für die Variable x vorgesehen sind.

Die Grundmenge ist Teil der Angabe. Zum Beispiel: $G = \mathbb{R}$.

Die **Definitionsmenge** $\boldsymbol{D}$ enthält alle Zahlen der Grundmenge, für die alle Terme der Gleichung definiert sind.

Wir müssen zum Beispiel eine Division durch 0 vermeiden.



Die **Lösungsmenge** $\boldsymbol{L}$ enthält alle Zahlen der Definitionsmenge, die Lösungen der Gleichung sind.

Eine Zahl heißt Lösung der Gleichung, wenn man beim Einsetzen dieser Zahl für x auf beiden Seiten das gleiche Ergebnis erhält.

Wozu die Definitionsmenge ermitteln?

Wie viele Lösungen hat die Gleichung $\frac{x}{x^2} = 1$? Lukas rechnet ohne viel nachzudenken:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2} &= 1 \quad \mid \cdot x^2 \\ x &= x^2 \mid -x^2 \\ x - x^2 &= 0 \\ x \cdot (1-x) &= 0 \end{aligned}$$

Die Gleichung $x \cdot (1-x) = 0$ hat 2 Lösungen, nämlich $x_1 =$ ______ und $x_2 =$ ______.

Die ursprüngliche Gleichung hat aber nur eine Lösung, nämlich $x =$ ______. Haben wir uns verrechnet?

Nein: Die Multiplikation mit x^2 ist nur eine Äquivalenzumformung, wenn $x \neq 0$ ist. Dabei ist also die Lösung $x = 0$ dazu gekommen.

Deshalb ermitteln wir zuerst die Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Äquivalenzumformungen

Äquivalenzumformungen ändern *nicht* die Lösungen einer Gleichung.

Addition des gleichen Terms auf beiden Seiten der Gleichung ist eine Äquivalenzumformung.
Zum Beispiel: Die Gleichungen

$$3 \cdot x - 6 = 0 \quad \text{und} \quad 3 \cdot x = 6$$

haben die gleiche Lösung ____ .

Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten der Gleichung ist eine Äquivalenzumformung.
Zum Beispiel: Die Gleichungen

$$x^2 + 3 = 4 \quad \text{und} \quad x^2 = 1$$

haben die gleichen Lösungen ____ und ____ .

Multiplikation mit der gleichen Zahl $\neq 0$ auf beiden Seiten der Gleichung ist eine Äquivalenzumformung.
Zum Beispiel: Die Gleichungen

$$\frac{x}{5} = -2 \quad \text{und} \quad x = 5 \cdot (-2)$$

haben die gleiche Lösung ____ .

Division durch den gleichen Term $\neq 0$ auf beiden Seiten der Gleichung ist eine Äquivalenzumformung.
Zum Beispiel: Die Gleichungen

$$4 \cdot x = 8 \quad \text{und} \quad x = \frac{8}{4}$$

haben die gleiche Lösung ____ .

Quadrieren ist *keine* Äquivalenzumformung

Beide Seiten einer Gleichung quadrieren ist *keine* Äquivalenzumformung.
Nach dem Quadrieren kann eine Gleichung nämlich mehr Lösungen als zuvor haben. Zum Beispiel:

Die Gleichung $x = -3$ hat eine Lösung, nämlich ______ .

Die quadrierte Gleichung $x^2 = 9$ hat zwei Lösungen, nämlich ______ und ______ .

Wir dürfen Gleichungen quadrieren. Die quadrierte Gleichung liefert aber nur *Lösungskandidaten* für die ursprüngliche Gleichung.

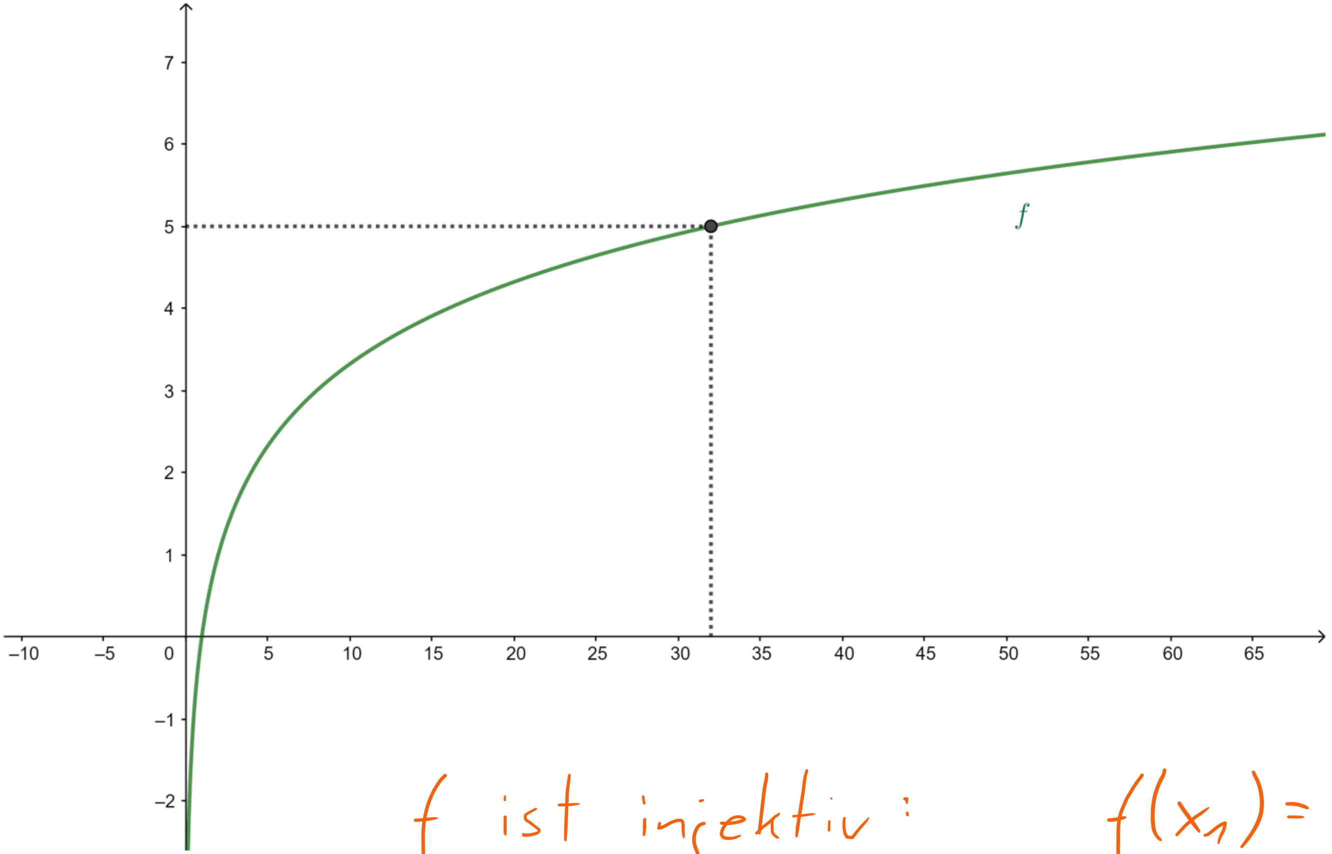
Wie sieht es mit "Logarithmieren" und "Exponieren" aus?

$$2^x = 32 \quad | \log_2$$
$$\Leftrightarrow x = 5$$

$$\ln(2x) = 1 \quad | e^{\wedge}$$
$$\Leftrightarrow 2x = e$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{e}{2}$$

Exponential- und Logarithmusfunktionen sind streng monoton, also injektiv.

(x^2 wäre das z.B. nicht)



MATHEMATIK macht FREU(N)DE

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$f(x) = \log_2(x)$

f ist injektiv: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Außerdem gilt ohnehin: $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

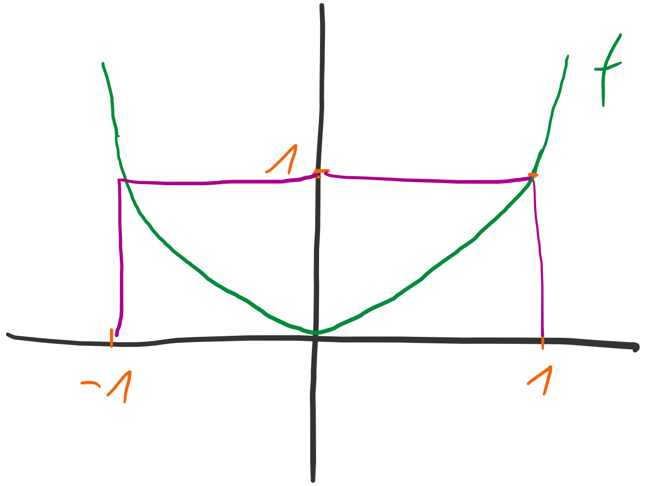
$\Rightarrow$ Anwenden von f auf beide Seiten einer Gleichung ist eine Äquivalenzumformung

Im Kreis drehen... oder nicht?!

$$3^x = 81 \quad | \log_3$$
$$\Leftrightarrow x = 4 \quad | 3^{\wedge}$$
$$\Leftrightarrow 3^x = 81$$

$$x = 1 \quad |\,^2$$
$$\Rightarrow x^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow x = \pm 1$$

1. und 2. Zeile sind <u>nicht</u> äquivalent



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$