1. Musterlösungen

Aufgrund häufiger Anfragen haben wir zu den folgenden Aufgaben aus KH – Termrechnung und AS – Calculus Musterlösungen zusammengestellt. Bitte beachtet, dass die Auswahl dieser Fragen unabhängig von der Fragen zum jeweils nächsten Testtermin erfolgt ist.

1.1 (1.4e in KH – Termrechnung)**.** ☆ Stelle den gegebenen Term als gekürzten Bruch dar.

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}+\cdots+\frac{1}{97\cdot 98\cdot 99}+\frac{1}{98\cdot 99\cdot 100}$$

Lösung. Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k\cdot(k+1)} &= \frac{(k+1)-k}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\\
\frac{1}{k\cdot(k+2)} &= \frac{(k+2)-k}{2\cdot k\cdot(k+2)} = \frac{1}{2\cdot k}-\frac{1}{2\cdot(k+2)}\\
\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)} &= \frac{(k+2)-(k+1)}{(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\implies \frac{1}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)} &= \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\cdot\frac{1}{k+2} = \\
&= \left(\frac{1}{2\cdot k}-\frac{1}{2\cdot(k+2)}\right)-\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right) = \\
&= \frac{1}{2\cdot k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2\cdot(k+2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\implies \sum_{k=1}^{98}\frac{1}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)} &= \sum_{k=1}^{98}\frac{1}{2\cdot k}-\sum_{k=1}^{98}\frac{1}{k+1}+\sum_{k=1}^{98}\frac{1}{2\cdot(k+2)}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{98}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{99}\frac{1}{k}+\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=3}^{100}\frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Für jedes $k = 3, 4, \ldots, 98$ heben sich die drei Summanden auf:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}-\frac{1}{k}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}=0$$

Wir rechnen die Überbleibsel von $k = 1, 2, 99, 100$ zusammen:

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{k=1}+\underbrace{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)}_{k=2}+\underbrace{\left(-\frac{1}{99}+\frac{1}{2\cdot 99}\right)}_{k=99}+\underbrace{\frac{1}{2\cdot 100}}_{k=100}=\frac{1}{4}-\frac{1}{198}+\frac{1}{200}=\frac{4949}{19\,800}=\frac{7^2\cdot 101}{2^3\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 11}$$

□

1.2 (9.4d in KH – Termrechnung). ☆ Ermittle die Null- und Extremstellen der Polynomfunktion $f(x) = x^6 - 26 \cdot x^3 - 27$.

Lösung.

1) Die Substitution $u = x^3$ liefert die folgende quadratische Gleichung:

$$0 = x^6 - 26 \cdot x^3 - 27 = \underbrace{u^2 - 26 \cdot u - 27}_{=(u-27)\cdot(u+1)} \iff u = -1 \text{ oder } u = 27$$

f hat also die beiden Nullstellen $x_1 = \sqrt[3]{-1} = -1$ und $x_2 = \sqrt[3]{27} = 3$.

2) Extremstellen mit Differentialrechnung:

$$f'(x) = 6 \cdot x^5 - 78 \cdot x^2 = 6 \cdot x^2 \cdot (x^3 - 13) = 0 \iff x = 0 \text{ oder } x = \sqrt[3]{13}$$

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \sqrt[3]{13}$	$x = \sqrt[3]{13}$	$x > \sqrt[3]{13}$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-27	$\searrow$	-196	$\nearrow$

$x = 0$ ist also eine Sattelstelle.

f hat damit nur die eine Extremstelle $x = \sqrt[3]{13}$ (lokales Minimum).

Extremstellen ohne Differentialrechnung:

$$f(x) = (x^3 - 13)^2 - 196$$

f ist also nach oben unbeschränkt und genau dann minimal, wenn

$$x^3 - 13 = 0 \iff x = \sqrt[3]{13}$$

□

1.3 (1.9d in AS – Calculus). Berechne die Ableitung der Funktion $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ an der Stelle $x_0 = 3$ von Hand ohne Ableitungsregeln. Tipp: $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$

Lösung. Steigung der Sekante durch $A = (3 \mid f(3))$ und $B = (3 + h \mid f(3 + h))$:

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{\sqrt{25 - (3+h)^2} - 4}{h} = \frac{\sqrt{25 - (3+h)^2} - 4}{h} \cdot \frac{\sqrt{25 - (3+h)^2} + 4}{\sqrt{25 - (3+h)^2} + 4} =$$

$$= \frac{25 - (9 + 6 \cdot h + h^2) - 16}{h \cdot \left(\sqrt{25 - (3+h)^2} + 4\right)} = \frac{-(6+h)}{\sqrt{25 - (3+h)^2} + 4}$$

Steigung der Tangente in $A = (3 \mid f(3))$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{-(6+h)}{\sqrt{25 - (3+h)^2} + 4} = \frac{-6}{8} = -0{,}75$$

□

1.4 (3.5i in AS – Calculus)**.** Zeige, dass die Folge $\langle a_n \rangle$ konvergiert und ermittle ihren Grenzwert a.

Tipp: Unter- und Obersummen

Sei $\varepsilon > 0$. Gib einen Index $n(\varepsilon)$ an, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n(\varepsilon)$.

$$a_n = \frac{1}{n} \cdot \ln\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n}\right)\right]$$

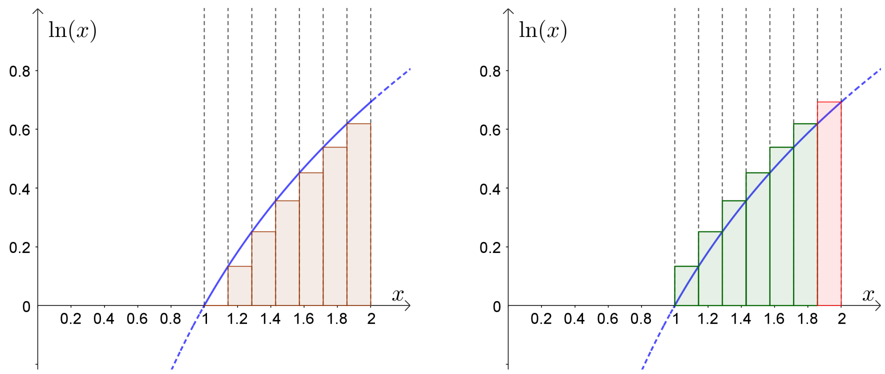
Lösung. Rechenregeln für Logarithmen:

$$a_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)\right]$$

$f(x) = \ln(x)$ ist streng monoton wachsend.
a_n ist also genau die Obersumme von f in $[1;2]$ mit n gleich breiten Rechtecken.
f ist integrierbar in $[1;2]$ (Begründung: f ist stetig bzw. f ist monoton und beschränkt.)
Also konvergieren diese Obersummen gegen das bestimmte Integral von f in $[1;2]$:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - x\,\Big|_1^2 = (2 \cdot \ln(2) - 2) - (0 - 1) = 2 \cdot \ln(2) - 1$$

Aus der Monotonie von f folgt, dass sich die Untersumme U_n und die Obersumme a_n nur um das erste bzw. letzte Rechteck unterscheiden (Teleskopsumme):



$$a_n - U_n = \frac{1}{n} \cdot \ln(2) - \frac{1}{n} \cdot \ln(1) = \frac{\ln(2)}{n} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > \frac{\ln(2)}{\varepsilon}$$

Aus $U_n \leq a \leq a_n$ folgt, dass sich auch a_n und a um weniger als ε unterscheiden, wenn $n > \frac{\ln(2)}{\varepsilon}$ ist.

□

1.5 (9.11j in AS – Calculus). Löse das gegebene Gleichungssystem.

$$\begin{cases} x + y + x \cdot y = 3 \\ x^2 + y^2 + x \cdot y = 39 \end{cases}$$

Lösung. Die zweite Gleichung kann wie folgt umgeschrieben werden:

$$x^2 + y^2 + x \cdot y = 39 \quad \iff \quad (x+y)^2 - x \cdot y = 39$$

Wir addieren die beiden Gleichungen:

$$(x+y)^2 + (x+y) = 42$$

Die Substitution $u = x + y$ liefert die folgende quadratische Gleichung:

$$\underbrace{u^2 + u - 42}_{=(u+7)\cdot(u-6)} = 0 \quad \iff \quad u = -7 \ \text{ oder } \ u = 6$$

1) $x + y = -7$ bzw. $y = -7 - x$ in die erste Gleichung einsetzen:

$$-7 + x \cdot (-7 - x) = 3 \quad \iff \quad \underbrace{x^2 + 7 \cdot x + 10}_{=(x+2)\cdot(x+5)} = 0$$

$(x_1 \mid y_1) = (-2 \mid -5)$ und $(x_2 \mid y_2) = (-5 \mid -2)$ sind Lösungen des Gleichungssystems.

2) $x + y = 6$ bzw. $y = 6 - x$ in die erste Gleichung einsetzen:

$$6 + x \cdot (6 - x) = 3 \quad \iff \quad \underbrace{x^2 - 6 \cdot x - 3}_{=(x-3+\sqrt{12})\cdot(x-3-\sqrt{12})} = 0$$

$(x_3 \mid y_3) = (3 + \sqrt{12} \mid 3 - \sqrt{12})$ und $(x_4 \mid y_4) = (3 - \sqrt{12} \mid 3 + \sqrt{12})$ sind Lösungen des Gleichungssystems.

□