Name: ______________________________ Matrikelnummer: __________________

1. Hinweise

- Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
- Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorherigen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
- Arbeitszeit: 90 Minuten
- Jede der 5 Aufgaben ist 5 Punkte wert (ohne ★ - Bonuspunkte).
- Die mit ★ gekennzeichneten Unterpunkte sind jeweils 2 Bonuspunkte wert.
- Die besten 4 der 5 Aufgaben werden zur Beurteilung herangezogen.

2. Aufgaben

Aufgabe 1. Für die Funktion f gilt:

$$f(x) = (k \cdot x + d) \cdot e^{-x^2} \quad \text{mit } k \neq 0$$

a) Ermittle die Ableitungsfunktion f'.

b) Begründe, warum f' jedenfalls zwei verschiedene reelle Nullstellen hat.

c) Ermittle das Monotonieverhalten von f, wenn $k = 4$ und $d = -2$ gilt.

Aufgabe 2. Für die Polynomfunktion p gilt: $p(x) = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 14 \cdot x + 15$

a) Zeige, dass bei der Polynomdivision

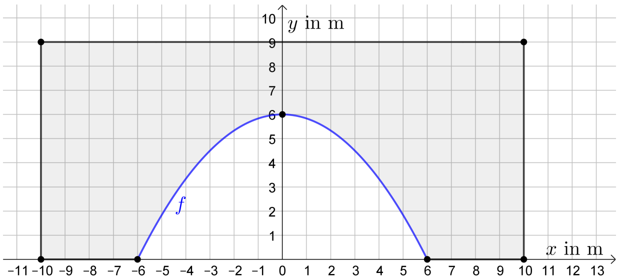
$$p(x) : (x - 1)$$

kein Rest bleibt.

b) Ermittle alle Nullstellen von p und vervollständige die Linearfaktorform von p.

$$p(x) = \boxed{} \cdot \left(\boxed{}\right) \cdot \left(\boxed{}\right) \cdot \left(\boxed{}\right)$$

Aufgabe 3. Der Querschnitt eines Brückenbogens ist dargestellt.



Für die Funktion f gilt:

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

a) Ermittle die Koeffizienten a, b und c.

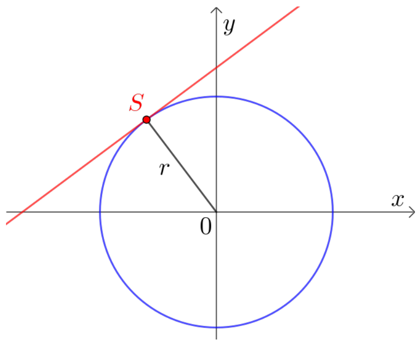
b) Berechne den Inhalt der grau markierten Querschnittsfläche.

Aufgabe 4. Für den Kreis mit Mittelpunkt $(0 \mid 0)$ und Radius r gilt: $x^2 + y^2 = r^2$
Zu jeder Gerade $y = k \cdot x + d$ mit $d \neq 0$ gibt es genau einen Radius $r > 0$ so, dass der Kreis und die Gerade einander in genau einem Punkt S berühren.

a) Berechne diesen Radius r und diesen Berührpunkt S für die Gerade $y = \frac{3}{4} \cdot x + 20$.

b) ☆ Stelle mithilfe von k und d eine Formel zur Berechnung von r auf.

$r =$



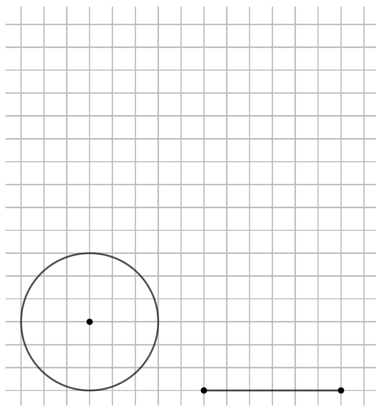
Aufgabe 5. Für das Volumen V_K einer Kugel mit Radius r gilt: $V_K = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Für das Volumen V_D eines Drehkegels mit Radius r und Höhe h gilt: $V_D = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$

a) Eine Kugel und ein Drehkegel haben den gleichen Radius r und das gleiche Volumen.
Stelle mithilfe von r eine Formel für die Höhe h des Drehkegels auf.

$h =$

Ein Querschnitt dieser Kugel ist rechts dargestellt.
Vervollständige den Querschnitt des Drehkegels so, dass die Kugel und der Drehkegel das gleiche Volumen haben.



b) Für den Oberflächeninhalt O_K einer Kugel mit Radius r gilt:

$$O_K = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Bei einem Drehkegel heißt jede Strecke, die die Spitze mit dem Grundkreis verbindet, auch Erzeugende. Für den Oberflächeninhalt O_D eines Drehkegels mit Radius r und Erzeugender s gilt:

$$O_D = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$$

Eine Kugel und ein Drehkegel haben den gleichen Radius und das gleiche Volumen. Berechne, um wie viel Prozent der Oberflächeninhalt des Drehkegels größer als jener der Kugel ist.