

Name: _____

Matrikelnummer: _____

1. HINWEISE

- Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
- Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorherigen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
- Arbeitszeit: 90 Minuten
- Jede der 5 Aufgaben ist 5 Punkte wert (ohne ★ - Bonuspunkte).
- Die mit ★ gekennzeichneten Unterpunkte sind jeweils 2 Bonuspunkte wert.
- Die besten 4 der 5 Aufgaben werden zur Beurteilung herangezogen.

2. AUFGABEN

Aufgabe 1. Löse die Wurzelgleichung

$$\sqrt{(2 \cdot x + 2) \cdot (x - 3)} = \sqrt{(1 - 3 \cdot x) \cdot (x + 9)}$$

über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

Lösung. Wir quadrieren beide Seiten der Gleichung und formen um:

$$\begin{aligned}(2 \cdot x + 2) \cdot (x - 3) &= (1 - 3 \cdot x) \cdot (x + 9) \\ 2 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 2 \cdot x - 6 &= x + 9 - 3 \cdot x^2 - 27 \cdot x \\ 5 \cdot x^2 + 22 \cdot x - 15 &= 0\end{aligned}$$

Wir lösen die quadratische Gleichung mit der großen Lösungsformel ($a = 5$, $b = 22$, $c = -15$):

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-22 \pm \sqrt{484 + 300}}{10} = \frac{-22 \pm 28}{10} \implies x_1 = -5, x_2 = \frac{3}{5}$$

Da wir die Gleichung im ersten Schritt quadriert haben, sind x_1 und x_2 nur Lösungskandidaten.

Wir führen die Probe durch, indem wir in die Wurzelgleichung einsetzen:

- $x = -5$

Linke Seite: $\sqrt{(-8) \cdot (-8)} = \sqrt{64} = 8$

Rechte Seite: $\sqrt{16 \cdot 4} = \sqrt{64} = 8$

Also ist -5 eine Lösung der Wurzelgleichung.

- $x = \frac{3}{5}$

Linke Seite: $\sqrt{-7,68}$

Rechte Seite: $\sqrt{-7,68}$

Weder die linke Seite noch die rechte Seite ist für $x = \frac{3}{5}$ definiert, also ist $\frac{3}{5}$ keine Lösung der Wurzelgleichung.

□

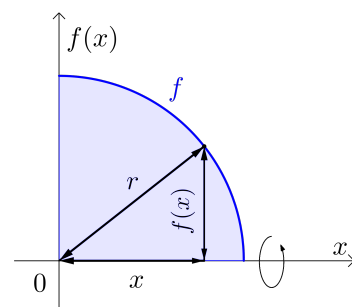
Aufgabe 2. Eine Halbkugel mit Radius r kann – wie rechts unten dargestellt – als Rotationskörper um die x -Achse beschrieben werden.

- a) Stelle mithilfe von r eine Funktionsgleichung von f auf.

$$f(x) = \boxed{\phantom{f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}}}$$

Rotiert der Graph einer Funktion f im Intervall $[a; b]$ um die x -Achse, dann gilt für das Rotationsvolumen V_x :

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 dx$$



- b) Leite damit eine Formel für das Volumen einer Halbkugel mit Radius r her.

Emily behauptet: Rotiert der Funktionsgraph von f im Intervall $[0; \frac{r}{3}]$ um die x -Achse, dann ist das Rotationsvolumen bereits mehr als halb so groß wie das Volumen der Halbkugel.

- c) Begründe mithilfe einer Rechnung, ob Emilys Behauptung stimmt.

Lösung.

- a) Aus dem Satz von Pythagoras folgt:

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

- b) Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt für das Volumen V_H der Halbkugel mit Radius r :

$$V_H = \pi \cdot \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \pi \cdot \left(r^2 \cdot x - \frac{1}{3} \cdot x^3 \right) \Big|_0^r = \pi \cdot \left(r^3 - \frac{1}{3} \cdot r^3 \right) = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

- c) Für das Rotationsvolumen V im Intervall $[0; \frac{r}{3}]$ gilt:

$$V = \pi \cdot \int_0^{\frac{r}{3}} (r^2 - x^2) dx = \pi \cdot \left(r^2 \cdot x - \frac{1}{3} \cdot x^3 \right) \Big|_0^{\frac{r}{3}} = \pi \cdot \left(\frac{r^3}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{r^3}{27} \right) = \frac{26}{81} \cdot \pi \cdot r^3$$

Daraus folgt:

$$\frac{V}{V_H} = \frac{26}{81} \cdot \frac{3}{2} = \frac{13}{27} < \frac{1}{2}$$

Also ist Emilys Behauptung falsch.

□

Aufgabe 3. Um die Lösungen der Ungleichung

$$\underbrace{x^3 + 4 \cdot x^2 - x - 3}_{=f(x)} > \underbrace{x^3 + 3 \cdot x^2 + x + 5}_{=g(x)}$$

zu berechnen, untersuchen wir die Funktionen f und g .

a) Berechne die Schnittstellen von f und g .

b) Zerlege $f(x) - g(x)$ in Linearfaktoren, und vervollständige die Vorzeichentabelle.

	$x < \boxed{}$	$x = \boxed{}$	$\boxed{} < x < \boxed{}$	$x = \boxed{}$	$x > \boxed{}$
$f(x) - g(x)$		0		0	

c) Gib die Lösungsmenge der Ungleichung $f(x) > g(x)$ an.

Lösung.

a) Die Schnittstellen sind die Lösungen der Gleichung $f(x) = g(x)$:

$$x^3 + 4 \cdot x^2 - x - 3 = x^3 + 3 \cdot x^2 + x + 5 \iff x^2 - 2 \cdot x - 8 = 0$$

Wir lösen die Gleichung mit quadratischer Ergänzung:

$$x^2 - 2 \cdot x - 8 = 0$$

$$(x - 1)^2 - 9 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 9$$

$$x - 1 = \pm 3$$

$$x = 1 \pm 3$$

Die beiden Schnittstellen sind also $x_1 = -2$ und $x_2 = 4$.

b) Aus a) folgt

$$f(x) - g(x) = x^2 - 2 \cdot x - 8 = (x + 2) \cdot (x - 4)$$

und damit die folgende Vorzeichentabelle:

	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
$f(x) - g(x)$	+	0	-	0	+

c) Es gilt $f(x) > g(x)$ genau dann, wenn $f(x) - g(x)$ positiv ist. Die Lösungsmenge der Ungleichung ist also $] -\infty; -2[\cup] 4; \infty[$. □

Aufgabe 4. Für die Funktion f gilt: $f(x) = x^2$

Es gibt genau einen Punkt $P = (x_P \mid y_P)$ am Funktionsgraphen von f , der vom Punkt $A = (2 \mid \frac{1}{2})$ den kleinstmöglichen Abstand hat.

a) Felix weiß, dass die Funktion w mit

$$w(x) = x^4 - 4 \cdot x + \frac{17}{4}$$

an der gesuchten Stelle x_P ein lokales Minimum hat. Berechne x_P und y_P .

b) Begründe, warum die Aussage von Felix richtig ist.

c) Zeige, dass die Gerade AP im rechten Winkel auf die Tangente an den Funktionsgraphen von f im Punkt P steht.

Lösung.

a) Wir ermitteln die Nullstelle von w' :

$$w'(x) = 4 \cdot x^3 - 4 = 0 \iff x^3 = 1 \iff x = 1$$

Die Funktion w hat an der Stelle $x_P = 1$ ein lokales Minimum, denn es gilt:

$$w''(x) = 12 \cdot x^2 \implies w''(1) = 12 > 0$$

Für den zugehörigen Funktionswert von f gilt:

$$y_P = f(1) = 1$$

b) Wir berechnen die Entfernung $d(x)$ vom Punkt $A = (2 \mid \frac{1}{2})$ zu jedem Punkt $(x \mid x^2)$ am Funktionsgraphen von f mit dem Satz von Pythagoras:

$$\begin{aligned} d(x) &= \sqrt{(x-2)^2 + (x^2 - \frac{1}{2})^2} = \\ &= \sqrt{x^2 - 4 \cdot x + 4 + x^4 - x^2 + \frac{1}{4}} = \\ &= \sqrt{x^4 - 4 \cdot x + \frac{17}{4}} = \sqrt{w(x)} \end{aligned}$$

Da die Wurzelfunktion $\odot \mapsto \sqrt{\odot}$ streng monoton steigend ist, hat die Funktion d an der gleichen Stelle ein lokales Minimum wie die Funktion w .

c) Es gilt: $\overrightarrow{PA} = (-\frac{1}{2} \mid 1)$

Aus $f'(x) = 2 \cdot x$ folgt, dass die Tangente an den Funktionsgraphen von f im Punkt $P = (1 \mid 1)$ die Steigung $f'(1) = 2$ hat. Ein Richtungsvektor der Tangente ist also $(\frac{1}{2})$. Aus

$$(-\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{2}) = 1 - 1 = 0$$

folgt, dass die beiden Vektoren einen rechten Winkel einschließen. □

