

Name: _____

Matrikelnummer: _____

1. HINWEISE

- Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
- Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorhergegangenen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
- Arbeitszeit: 90 Minuten
- Jede der 5 Aufgaben ist 5 Punkte wert (ohne ★ - Bonuspunkte).
- Die mit ★ gekennzeichneten Unterpunkte sind jeweils 2 Bonuspunkte wert.
- Die besten 4 der 5 Aufgaben werden zur Beurteilung herangezogen.

2. AUFGABEN

Aufgabe 1. Die quadratische Funktion f hat die folgenden Eigenschaften:

- Die Funktion f hat die Extremstelle $x = 4$.
- Der Funktionsgraph schneidet die senkrechte Achse im Punkt $(0 \mid 18)$.
- Der Funktionsgraph schließt im Intervall $[0; 6]$ mit der waagrechten Achse eine Fläche mit Inhalt 36 ein.

Ermittle eine Funktionsgleichung von f .

Lösung. Wir stellen ein Gleichungssystem für die Koeffizienten der quadratischen Funktion

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

auf:

- Da f an der Stelle $x = 4$ eine Extremstelle hat, ist ihre Steigung dort 0:

$$f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b \implies 8 \cdot a + b = 0 \quad (\text{I})$$

- Da der Funktionsgraph den Punkt $(0 \mid 18)$ enthält, gilt:

$$f(0) = 18 \implies c = 18 \quad (\text{II})$$

- Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\int_0^6 f(x) \, dx = \left. \frac{a}{3} \cdot x^3 + \frac{b}{2} \cdot x^2 + c \cdot x \right|_0^6 = 72 \cdot a + 18 \cdot b + 6 \cdot c$$

und damit:

$$72 \cdot a + 18 \cdot b + 6 \cdot c = 36 \quad (\text{III})$$

Wie lösen das lineare Gleichungssystem:

$$\stackrel{\text{I}}{\implies} b = -8 \cdot a$$

$$\stackrel{\text{III}}{\implies} 72 \cdot a + 18 \cdot (-8 \cdot a) + 6 \cdot 18 = 36 \implies -72 \cdot a = -72 \implies a = 1$$

$$\stackrel{\text{I}}{\implies} b = -8$$

Die quadratische Funktion f mit

$$f(x) = x^2 - 8 \cdot x + 18$$

hat also diese 3 Eigenschaften. □

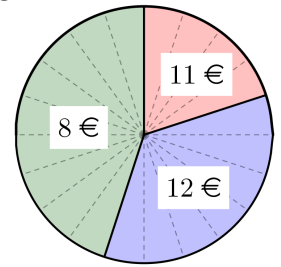
Aufgabe 2. Das dargestellte Glücksrad ist in 20 gleich große Sektoren geteilt.

Bei jeder Drehung des Glücksrads wird ein Sektor nach dem Zufallsprinzip ausgewählt.

Der eingezeichnete Gewinnbereich mit 11 € besteht aus 4 Sektoren.

Die verbleibenden Sektoren sind so in 2 Gewinnbereiche mit 8 € bzw. 12 € aufzuteilen, dass der erwartete Gewinn pro Drehung 10 € beträgt.

Berechne die dafür benötigten Wahrscheinlichkeiten der Gewinnbereiche mit 8 € bzw. 12 €, und zeichne die beiden Gewinnbereiche rechts ein.



Lösung. Die Zufallsvariable X gibt den Gewinn pro Drehung an. Für die Zufallsvariable X gilt:

x_i	8 €	11 €	12 €
$P(X = x_i)$	p_1	$\frac{4}{20}$	p_2

Da die Summe der Wahrscheinlichkeiten 1 sein muss, gilt:

$$p_1 + \frac{4}{20} + p_2 = 1 \implies p_2 = 0,8 - p_1$$

Da der Erwartungswert $E(X) = 10$ € sein soll, gilt:

$$E(X) = 8 \cdot p_1 + 11 \cdot \frac{4}{20} + 12 \cdot p_2 = 10$$

Wir lösen das Gleichungssystem mit dem Einsetzungsverfahren:

$$8 \cdot p_1 + 2,2 + 12 \cdot (0,8 - p_1) = 10$$

$$8 \cdot p_1 + 2,2 + 9,6 - 12 \cdot p_1 = 10$$

$$-4 \cdot p_1 = -1,8$$

$$p_1 = 0,45 = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$$

$$p_2 = 0,8 - p_1 = 0,35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$$

Der Gewinnbereich für 8 € muss also aus 9 Sektoren bestehen und der Gewinnbereich für 12 € aus 7 Sektoren. □

Aufgabe 3. Ermittle jeweils eine Stammfunktion F der gegebenen Funktion f .

- a) $f(x) = 4 \cdot \cos(x) + 2$ $F(x) = 4 \cdot \sin(x) + 2 \cdot x$
- b) $f(x) = \cos(4 \cdot x) + 2$ $F(x) = \frac{1}{4} \cdot \sin(4 \cdot x) + 2 \cdot x$
- c) $f(x) = 4 \cdot x + \cos(2)$ $F(x) = 2 \cdot x^2 + \cos(2) \cdot x$
- d) $f(x) = 4 \cdot \cos(x + 2)$ $F(x) = 4 \cdot \sin(x + 2)$
- e) $f(x) = \cos(4) \cdot x + 2$ $F(x) = \frac{\cos(4)}{2} \cdot x^2 + 2 \cdot x$
- f) $f(x) = \cos(4 \cdot x + 2)$ $F(x) = \frac{1}{4} \cdot \sin(4 \cdot x + 2)$

Lösung. Aus der Kettenregel folgt:

$$[\sin(4 \cdot x)]' = \cos(4 \cdot x) \cdot 4$$

Beim Ermitteln einer Stammfunktion von

$$x \mapsto \cos(4 \cdot x)$$

in **b)** kehren wir die Kettenregel um, indem wir durch 4 dividieren. □

Aufgabe 4. Für das Volumen V einer Kugel mit Radius r gilt: $V(r) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Der Radius einer Kugel mit Radius r wird um 2 cm vergrößert.

Das Volumen der Kugel wird dabei um 4200 cm^3 größer.

Berechne die Radien der beiden Kugeln.

Lösung. Für das Volumen der größeren Kugel gilt:

$$\begin{aligned} V(r+2) &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (r+2)^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (r^3 + 6 \cdot r^2 + 12 \cdot r + 8) = \\ &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 + 8 \cdot \pi \cdot r^2 + 16 \cdot \pi \cdot r + \frac{32}{3} \cdot \pi \end{aligned}$$

Da das Volumen der größeren Kugel um 4200 cm^3 größer als jenes der kleineren Kugel ist, gilt:

$$\begin{aligned} V(r+2) - V(r) &= 4200 \\ 8 \cdot \pi \cdot r^2 + 16 \cdot \pi \cdot r + \frac{32}{3} \cdot \pi &= 4200 \\ 8 \cdot \pi \cdot r^2 + 16 \cdot \pi \cdot r + \frac{32}{3} \cdot \pi - 4200 &= 0 \end{aligned}$$

Wir lösen die quadratische Gleichung mit der großen Lösungsformel ($a = 8 \cdot \pi$, $b = 16 \cdot \pi$, $c = \frac{32}{3} \cdot \pi - 4200$):

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \implies (r_1 = -13,91... \text{ cm}), r_2 = 11,91... \text{ cm}$$

Die Radien der beiden Kugeln sind also $11,91... \text{ cm}$ bzw. $13,91... \text{ cm}$.

□

Aufgabe 5.

- a) Du sollst 4 rote Kugeln und 3 blaue Kugeln in einer Reihe beliebig anordnen. Zum Beispiel:



Die oben dargestellte Anordnung hat das Farbmuster (B, R, B, B, R, R, R) .

Wie viele verschiedene Farbmuster sind insgesamt möglich?

- b) In einer Urne sind 10 rote und 5 blaue Kugeln.

Du ziehst 7 Kugeln ohne Zurücklegen. Berechne die Wahrscheinlichkeit in Prozent, dass du dabei zuerst 4 rote Kugeln und danach 3 blaue Kugeln ziehst.

- c) In einer Urne sind 10 rote und 5 blaue Kugeln.

Du ziehst 7 Kugeln ohne Zurücklegen. Berechne die Wahrscheinlichkeit in Prozent, dass du dabei 4 rote Kugeln und 3 blaue Kugeln in beliebiger Reihenfolge ziehst.

Lösung.

- a) Für die Anzahl möglicher Farbmuster gilt:

$$\frac{7!}{4! \cdot 3!} = \binom{7}{4} = 35$$

- b) Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit mit der Multiplikationsregel:

$$\frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = 0,009\,324\dots = 0,9324\dots \%$$

- c) Wenn wir die 4 roten und die 3 blauen gezogenen Kugeln in eine Reihe legen, dann hat jedes der 35 Farbmuster aus **a)** die gleiche Wahrscheinlichkeit 0,9324... % aus **b)**, weil nur die Reihenfolge der Zähler vertauscht wird. Zum Beispiel gilt für die Wahrscheinlichkeit des oben dargestellten Farbmusters:

$$\frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} \cdot \frac{4}{13} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = 0,009\,324\dots = 0,9324\dots \%$$

Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit mit der Additionsregel:

$$\underbrace{0,9324\dots \% + 0,9324\dots \% + \dots + 0,9324\dots \%}_{35 \text{ Summanden}} = 35 \cdot 0,9324\dots \% = 32,63\dots \%$$

□