Name: ______________________ Matrikelnummer: ______________

1. Hinweise

– Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
– Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorhergegangenen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
– Arbeitszeit: 90 Minuten
– Jede der 5 Aufgaben ist 5 Punkte wert (ohne ☆ - Bonuspunkte).
– Die mit ☆ gekennzeichneten Unterpunkte sind jeweils 2 Bonuspunkte wert.
– Die besten 4 der 5 Aufgaben werden zur Beurteilung herangezogen.

2. Aufgaben

Aufgabe 1. Zerlege das Polynom

$$4 \cdot x^3 - 21 \cdot x + 10$$

in Linearfaktoren.

Lösung. Ganzzahlige Nullstellen müssen ganzzahlige Teiler von 10 sein, also ± 1, ± 2, ± 5, ± 10. Durch Probieren finden wir die Nullstelle $x_1 = 2$. Es gilt also:

$$4 \cdot x^3 - 21 \cdot x + 10 = 4 \cdot (x-2) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

Wir dividieren beide Seiten durch den Linearfaktor $(x-2)$. Auf der linken Seite erhalten wir:

$$\begin{array}{l}
\ominus \left\{ \begin{array}{l} (4 \cdot x^3 \qquad\qquad - 21 \cdot x + 10) : (x-2) = 4 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 5 \\ \ 4 \cdot x^3 - 8 \cdot x^2 \end{array} \right. \\
\hline
\qquad \ominus \left\{ \begin{array}{l} 8 \cdot x^2 - 21 \cdot x + 10 \\ 8 \cdot x^2 - 16 \cdot x \end{array} \right. \\
\hline
\qquad\qquad \ominus \left\{ \begin{array}{r} - \ 5 \cdot x + 10 \\ - \ 5 \cdot x + 10 \end{array} \right. \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0 \text{ Rest}
\end{array}$$

Dei rechte Seite hat nach der Division durch $(x-2)$ noch die Nullstellen x_2 und x_3. Also können wir x_2 und x_3 als Lösungen der quadratischen Gleichung $4 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 5 = 0$ berechnen:

$$x_{2,3} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 80}}{8} = \frac{-8 \pm 12}{8} \qquad \Longrightarrow \qquad x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = -\frac{5}{2}$$

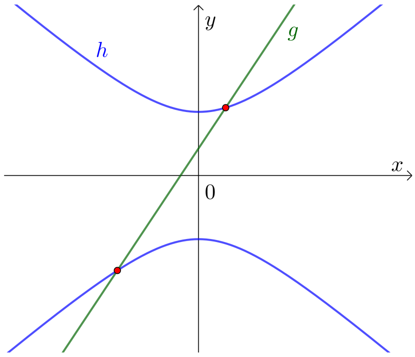
Die 3 Nullstellen und der Leitkoeffizient 4 legen die Zerlegung in Linearfaktoren fest:

$$4 \cdot x^3 - 21 \cdot x + 10 = 4 \cdot (x-2) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{5}{2}\right)$$ □

Aufgabe 2. Die Gerade g und die Hyperbel h mit

$$g\colon\ -3\cdot x+2\cdot y=4 \qquad\qquad h\colon\ -3\cdot x^2+4\cdot y^2=88$$

schneiden einander in 2 Punkten:



Berechne die Entfernung zwischen diesen beiden Schnittpunkten.

Lösung. Die Schnittpunkte sind die Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}:&\quad -3\cdot x+2\cdot y=4 \quad\implies y=\frac{3\cdot x+4}{2}\\ \mathrm{II}:&\quad -3\cdot x^2+4\cdot y^2=88 \end{aligned}$$

Wir setzen in Gleichung II ein und formen um:

$$\begin{aligned} -3\cdot x^2+4\cdot\left(\frac{3\cdot x+4}{2}\right)^2&=88\\ -3\cdot x^2+9\cdot x^2+24\cdot x+16&=88\\ 6\cdot x^2+24\cdot x-72&=0\\ \underbrace{x^2+4\cdot x-12}_{=(x-2)\cdot(x+6)}&=0 \end{aligned}$$

Einsetzen in I liefert die Schnittpunkte:

$$\begin{aligned} x_1&=2 &&\implies y_1=\frac{3\cdot 2+4}{2}=5 &&\implies S_1=(2\mid 5)\\ x_2&=-6 &&\implies y_2=\frac{3\cdot(-6)+4}{2}=-7 &&\implies S_2=(-6\mid -7) \end{aligned}$$

Der Satz von Pythagoras liefert die Entfernung zwischen den beiden Punkten:

$$\sqrt{(2-(-6))^2+(5-(-7))^2}=\sqrt{208}$$

□

Aufgabe 3. Das Monotonieverhalten der Funktion f mit

$$f(x) = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot k \cdot x^2 + 42$$

hängt vom Wert des Parameters $k \in \mathbb{R}$ ab.
Ermittle das Monotonieverhalten von f in Abhängigkeit von k. Hinweis: Es gibt 3 Fälle zu unterscheiden.

Lösung. Wir ermitteln die Ableitungsfunktion:

$$f'(x) = 6 \cdot x^2 - 6 \cdot k \cdot x = 6 \cdot x \cdot (x - k)$$

Die Nullstellen von f' sind also $x_1 = 0$ und $x_2 = k$.
Der Graph von f hat also an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = k$ eine waagrechte Tangente.

- Fall 1: $k = 0$
  In diesem Fall wechselt $f'(x) = 6 \cdot x \cdot x$ an keiner Stelle das Vorzeichen.
  Wir ermitteln das Monotonieverhalten von f:

	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	Sattelpunkt	$\nearrow$

- Fall 2: $k > 0$
  In diesem Fall wechselt $f'(x) = 6 \cdot x \cdot (x - k)$ an den Stellen 0 und k das Vorzeichen.
  Wir ermitteln das Monotonieverhalten von f:

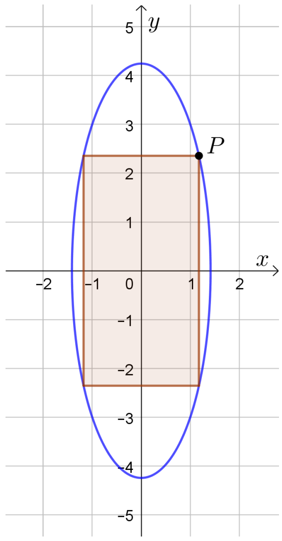
	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < k$	$x = k$	$x > k$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	Hochpunkt	$\searrow$	Tiefpunkt	$\nearrow$

- Fall 3: $k < 0$
  In diesem Fall wechselt $f'(x) = 6 \cdot (x - k) \cdot x$ an den Stellen 0 und k das Vorzeichen.
  Wir ermitteln das Monotonieverhalten von f:

	$x < k$	$x = k$	$k < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	Hochpunkt	$\searrow$	Tiefpunkt	$\nearrow$

$\square$

Aufgabe 4. Die Lösungen der Gleichung $9 \cdot x^2 + y^2 = 18$ bilden die dargestellte Ellipse.



Dieser Ellipse werden Rechtecke eingeschrieben:

- Der Eckpunkt $P = (x_P \mid y_P)$ liegt auf der Ellipse im 1. Quadranten.
- Die Seiten des Rechtecks sind parallel zu den Koordinatenachsen.

Der Flächeninhalt F des Rechtecks hängt von x_P ab.

1) Zeige, dass

$$F(x_P) = 12 \cdot \sqrt{2 \cdot x_P^2 - x_P^4}$$

gilt.

2) Ermittle den größten Flächeninhalt, den ein solches Rechteck haben kann. Welche Koordinaten hat P in diesem Fall?

Lösung.

1) Für den Flächeninhalt F gilt:

$$F = 2 \cdot x_P \cdot 2 \cdot y_P = 4 \cdot x_P \cdot y_P$$

Da P auf der Ellipse liegt, gilt:

$$9 \cdot x_P^2 + y_P^2 = 18 \implies y_P = \sqrt{18 - 9 \cdot x_P^2} = 3 \cdot \sqrt{2 - x_P^2}$$

Einsetzen liefert die angegebene Funktionsgleichung:

$$F(x_P) = 4 \cdot x_P \cdot 3 \cdot \sqrt{2 - x_P^2} = 12 \cdot \sqrt{2 \cdot x_P^2 - x_P^4}$$

2) Da die Wurzelfunktion $☺ \mapsto \sqrt{☺}$ streng monoton wachsend ist, nimmt F den größten Funktionswert an der gleichen *Stelle* an wie die Funktion G mit:

$$G(x) = 2 \cdot x^2 - x^4$$

Wir ermitteln die Nullstellen von G':

$$G'(x) = 4 \cdot x - 4 \cdot x^3 = 4 \cdot x \cdot (1 - x^2) = 4 \cdot x \cdot (1 - x) \cdot (1 + x)$$

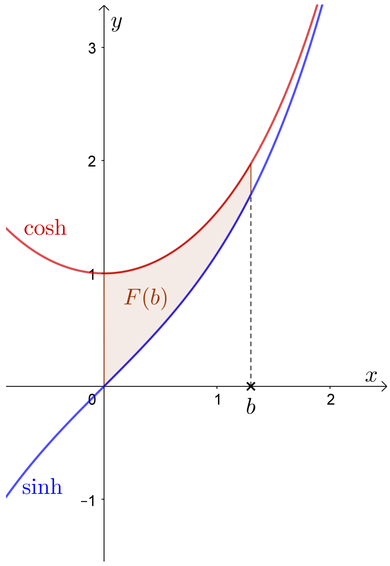
Der Graph von G hat also an den Stellen -1, 0 und 1 eine waagrechte Tangente.
Aus

$$G''(x) = 4 - 12 \cdot x^2, \quad G''(-1) < 0, \quad G''(0) > 0, \quad \text{und} \quad G''(1) < 0$$

folgt, dass G an den Stellen -1 und 1 ein lokales Maximum und an der Stelle 0 ein lokales Minimum hat. Also nimmt die Funktion F an der Stelle $x_P = 1$ den größten Funktionswert im Definitionsbereich an.
Das gesuchte Rechteck hat also den Flächeninhalt $F(1) = 12$ mit $P = (1 \mid 3)$. □

Aufgabe 5. Für die reellen Funktionen sinh (*Sinus hyperbolicus*) und cosh (*Cosinus hyperbolicus*) gilt:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



1) Begründe, warum $\cosh(x) > \sinh(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Die Graphen der beiden Funktionen schließen im Intervall $[0; b]$ die rechts dargestellte Fläche mit Inhalt $F(b)$ ein.

2) Stelle eine Formel für $F(b)$ mit $b > 0$ auf, und berechne den Grenzwert $\lim\limits_{b\to\infty} F(b)$.

3) Es gibt ein $a \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\sinh^2(x) + \cosh^2(x) = \cosh(a \cdot x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Berechne diesen Wert a.

Rotiert die dargestellte Fläche mit Inhalt $F(b)$ um die x-Achse, dann entsteht ein Rotationskörper mit Volumen $V(b)$.

4) ☆ Zeige, dass $\lim\limits_{b\to\infty} V(b) = \infty$ gilt.

Lösung.

1) Wir formen die Ungleichung um:

$$\cosh(x) > \sinh(x) \iff \frac{e^x + e^{-x}}{2} > \frac{e^x - e^{-x}}{2} \iff e^x + e^{-x} > e^x - e^{-x} \iff 2 \cdot e^{-x} > 0$$

Aus $e^{☺} > 0$ für alle ☺ $\in \mathbb{R}$ folgt damit, dass $\cosh(x) > \sinh(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

2) Aus $\cosh(x) - \sinh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{2 \cdot e^{-x}}{2} = e^{-x}$ folgt

$$F(b) = \int_0^b (\cosh(x) - \sinh(x)) \, \mathrm{d}x = \int_0^b e^{-x} \, \mathrm{d}x = -e^{-x} \Big|_0^b = -e^{-b} - (-1) = 1 - e^{-b}$$

$$\implies \lim_{b\to\infty} F(b) = \lim_{b\to\infty} \left(1 - e^{-b}\right) = 1 - 0 = 1$$

3) Wir vereinfachen die linke Seite der Gleichung:

$$\begin{aligned}\sinh^2(x)+\cosh^2(x) &= \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2= \\ &= \frac{e^{2\cdot x}-2+e^{-2\cdot x}}{4}+\frac{e^{2\cdot x}+2+e^{-2\cdot x}}{4}= \\ &= \frac{2\cdot e^{2\cdot x}+2\cdot e^{-2\cdot x}}{4}=\frac{e^{2\cdot x}+e^{-2\cdot x}}{2}=\cosh(2\cdot x)\end{aligned}$$

Der gesuchte Wert ist also $a=2$.

4) Für das Rotationsvolumen gilt:

$$V(b)=\pi\cdot\int_0^b\cosh^2(x)\,\mathrm{d}x-\pi\cdot\int_0^b\sinh^2(x)\,\mathrm{d}x=\pi\cdot\int_0^b[\cosh^2(x)-\sinh^2(x)]\,\mathrm{d}x$$

Wir vereinfachen den Integranden:

$$\begin{aligned}\cosh^2(x)-\sinh^2(x) &= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2= \\ &= \frac{e^{2\cdot x}+2+e^{-2\cdot x}}{4}-\frac{e^{2\cdot x}-2+e^{-2\cdot x}}{4}=1\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$V(b)=\pi\cdot\int_0^b 1\,\mathrm{d}x=\pi\cdot b$$

Tatsächlich wächst das Rotationsvolumen also unbeschränkt, obwohl $F(b)$ beschränkt ist:

$$\lim_{b\to\infty}V(b)=\lim_{b\to\infty}(\pi\cdot b)=\infty$$

$\square$