

Name: _____

Matrikelnummer: _____

1. HINWEISE

- Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
- Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller vorhergegangenen Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
- Arbeitszeit: 90 Minuten
- Jede der 5 Aufgaben ist 5 Punkte wert (ohne ★ - Bonuspunkte).
- Die mit ★ gekennzeichneten Unterpunkte sind jeweils 2 Bonuspunkte wert.
- Die besten 4 der 5 Aufgaben werden zur Beurteilung herangezogen.

2. AUFGABEN

Aufgabe 1. Löse die gegebene Gleichung über der Grundmenge \mathbb{R} .

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2 \cdot x + 2}$$

Aufgabe 2. Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ ist rechts unten dargestellt.

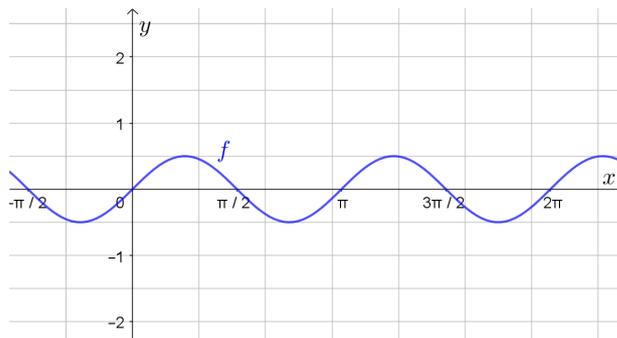
1) Es gibt genau eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ so, dass

$$f(x) = c \cdot f''(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Berechne c .

2) Skizziere rechts den Funktionsgraphen von f'' .

3) ★ Berechne $\int_0^{\pi/2} f(x) dx$.



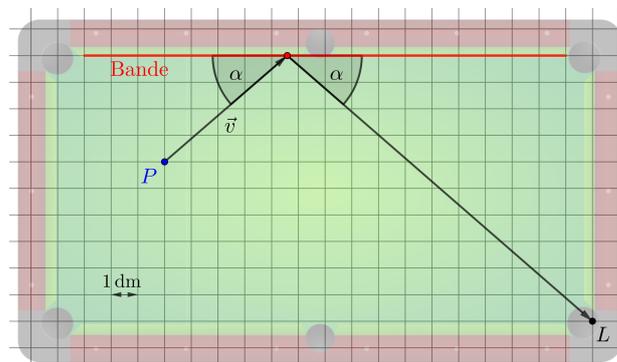
Aufgabe 3. Im Bild rechts unten ist ein Billard-Tisch dargestellt.

Das quadratische Raster hat die Seitenlänge 1 dm.

Die obere Bande verläuft entlang einer Gitterlinie.

Die Kugel im Gitterpunkt P soll so entlang des Vektors \vec{v} gegen die obere Bande gespielt werden, dass sie danach direkt zum Gitterpunkt L rollt.

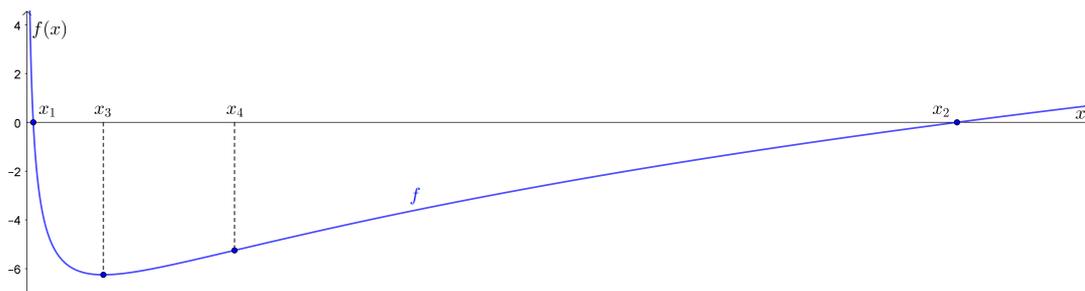
Die Kugel ist modellhaft punktförmig und es gilt:
Aufprallwinkel = Abprallwinkel = α



1) Berechne den Vektor \vec{v} .

2) Berechne den Winkel α .

Aufgabe 4. Der Graph der Funktion f mit $f(x) = [\ln(x)]^2 + \ln(x) - 6$ ist unten dargestellt.



1) Berechne die Nullstellen x_1 und x_2 . Runde auf 3 Nachkommastellen.

$$x_1 = \boxed{} \quad x_2 = \boxed{}$$

2) Berechne die Extremstelle x_3 . Runde auf 3 Nachkommastellen.

$$x_3 = \boxed{}$$

3) Berechne die Wendestelle x_4 . Runde auf 3 Nachkommastellen.

$$x_4 = \boxed{}$$

Aufgabe 5. Du hast einen Vorrat an gewöhnlichen Spielwürfeln, also faire 6-seitige Würfel mit den Augenzahlen von 1 bis 6.



1) Du würfelst mit einem Spielwürfel.

Die Zufallsvariable X_1 gibt die gewürfelte Augenzahl an.

Trage die Wahrscheinlichkeiten in die Tabelle ein, und berechne den Erwartungswert $E(X_1)$.

k	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = k)$						

2) Du würfelst mit 2 Spielwürfeln.

Die Zufallsvariable X_2 gibt die größere der beiden gewürfelten Augenzahlen an.

Trage die Wahrscheinlichkeiten in die Tabelle ein, und berechne den Erwartungswert $E(X_2)$.

k	1	2	3	4	5	6
$P(X_2 = k)$						

3) ☆ Du würfelst mit n Spielwürfeln.

Die Zufallsvariable X_n gibt die größte der n gewürfelten Augenzahlen an.

Stelle mithilfe von n eine Formel für den Erwartungswert $E(X_n)$ auf.

Hinweis: $\sum_{k=1}^6 k \cdot P(X_n = k) = \sum_{k=1}^6 P(X_n \geq k) = \sum_{k=1}^6 [1 - P(X_n < k)]$

Zeige, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = 6$ gilt.