Name: ______________________ Matrikelnummer: ______________ Gruppe: _____

– Arbeitszeit: 60 Minuten **Erreichte Punkte:** _____ **von 12**
– Prüfungsstoff: 9. – 10. Schulstufe vgl. „So viel Rechnen muss sein"
– Als Hilfsmittel sind nur Papier, Stift und Geodreieck zugelassen.
– Bei jeder Aufgabe sind 2 Punkte zu erreichen.

---

(1) Für die quadratische Funktion f gilt: $f(x) = x^2 - 3 \cdot x - 4$
Mithilfe von f werden die quadratischen Funktionen g und h gebildet:

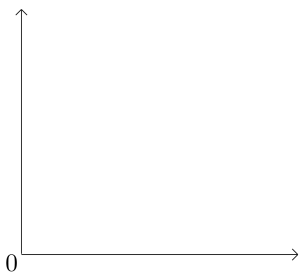
a) $g(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x)$ **b)** $h(x) = f\left(\frac{1}{2} \cdot x\right)$

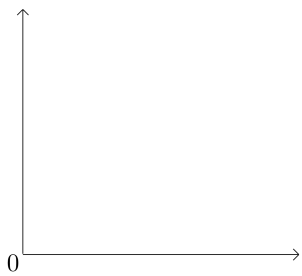
Berechne die Nullstellen von g und von h.

(2) Für die elektrische Spannung U, die Stromstärke I und den elektrischen Widerstand R gilt das *Ohmsche Gesetz*: $I = \frac{U}{R}$

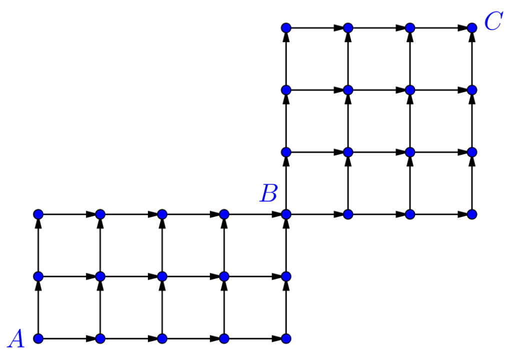
a) Der Widerstand R ist konstant und positiv. Skizziere links unten einen möglichen Graphen der Funktion $U \mapsto I(U) = \frac{U}{R}$. Beschrifte die Achsen.

b) Die Spannung U ist konstant und positiv. Skizziere rechts unten einen möglichen Graphen der Funktion $R \mapsto I(R) = \frac{U}{R}$. Beschrifte die Achsen.





(3) Lorenz steht im Punkt A und möchte entlang der Pfeile zum Punkt C kommen.



a) Wie viele mögliche Wege von A nach C hat Lorenz?

Im Bild oben besteht das Quadrat mit Eckpunkten B und C aus 4×4 Knoten.

b) Wie viele mögliche Wege von A nach C hat Lorenz, wenn das Quadrat mit Eckpunkten B und C stattdessen aus $n \times n$ Knoten besteht ($n \geq 1$)? Stelle mithilfe von n eine Formel auf.

Weiter auf der Rückseite . . .

④ Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3\cdot x+1 \\ x+3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} x-1 \\ -2\cdot x \\ 7\cdot x+5 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$.

Zeige, dass es genau eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ gibt, für die $\vec{a}$ und $\vec{b}$ normal aufeinander stehen.

⑤

1) Führe die folgenden Rechenschritte mit dem Startwert 4 durch.
Trage die Zwischenergebnisse in die Kästchen unten ein.

- **i)** Addiere 3 zum Startwert.
- **ii)** Multipliziere das Ergebnis mit 8.
- **iii)** Subtrahiere 4 vom Ergebnis.
- **iv)** Dividiere das Ergebnis durch 2.
- **v)** Subtrahiere vom Ergebnis das Vierfache des Startwerts.
- **vi)** Addiere 32 zum Ergebnis.

Startwert Ergebnis

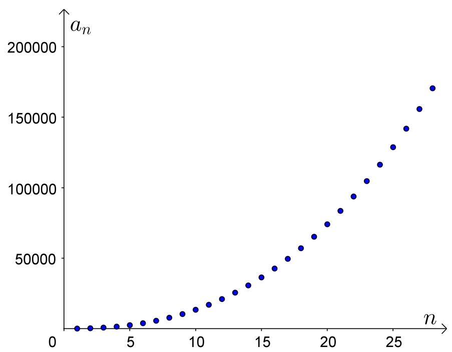
$\boxed{4} \xrightarrow{\text{i)}} \boxed{} \xrightarrow{\text{ii)}} \boxed{} \xrightarrow{\text{iii)}} \boxed{} \xrightarrow{\text{iv)}} \boxed{} \xrightarrow{\text{v)}} \boxed{} \xrightarrow{\text{vi)}} \boxed{42}$

2) Zeige, dass für jeden Startwert $x \in \mathbb{R}$ das Ergebnis immer 42 ist.

⑥ Die *Stirlingformel* hilft beim Annähern von $n!$ für große natürliche Zahlen n:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n}$$

Für die Folge (a_n) gilt: $a_n = \dfrac{6^{6\cdot n} \cdot (n!)^6}{(6 \cdot n)!}$



1) Verwende die Stirlingformel, um mithilfe von n eine Annäherung für $(6 \cdot n)!$ aufzustellen.

$$(6 \cdot n)! \approx \boxed{}$$

Aus der Stirlingformel folgt:

$$a_n \approx 40{,}4 \cdot n^{\boxed{}}$$

2) Trage oben den richtigen Exponenten in das Kästchen ein. Dokumentiere deinen Lösungsweg.

Mathematischer Kontext: Du würfelst mit einem fairen 6-seitigen Würfel insgesamt $6 \cdot n$ Mal.
Wie wahrscheinlich ist es, dass du jede Augenzahl *genau* n Mal würfelst? Tatsächlich gilt: Die Wahrscheinlichkeit ist „1 zu a_n“.