

Summenregel, Differenzregel & Faktorregel



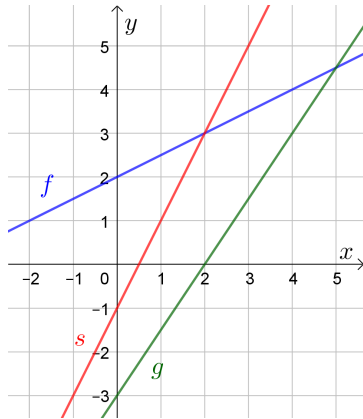
In den Bildern unten siehst du die Graphen der linearen Funktionen f und g .
Ermittle ihre Funktionsgleichungen:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x + 2 \quad g(x) = \frac{3}{2} \cdot x - 3$$

Stelle eine Gleichung der Funktion $s = f + g$ auf:

$$s(x) = 2 \cdot x - 1$$

Zeichne den Graphen von s ein:



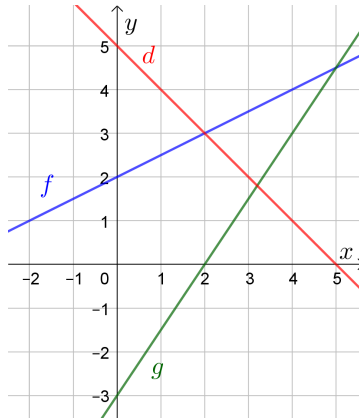
Für die Steigungen gilt:

$$s'(x) = 2 = f'(x) + g'(x)$$

Stelle eine Gleichung der Funktion $d = f - g$ auf:

$$d(x) = -1 \cdot x + 5$$

Zeichne den Graphen von d ein:



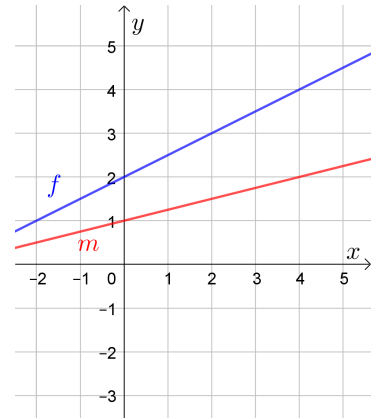
Für die Steigungen gilt:

$$d'(x) = -1 = f'(x) - g'(x)$$

Stelle eine Gleichung der Funktion $m = \frac{1}{2} \cdot f$ auf:

$$m(x) = \frac{1}{4} \cdot x + 1$$

Zeichne den Graphen von m ein:



Für die Steigungen gilt:

$$m'(x) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot f'(x)$$

Summenregel, Differenzregel & Faktorregel



Für alle differenzierbaren Funktionen f und g gelten die folgenden Ableitungsregeln:

Summenregel: $s(x) = f(x) + g(x) \implies s'(x) = f'(x) + g'(x)$

Differenzregel: $d(x) = f(x) - g(x) \implies d'(x) = f'(x) - g'(x)$

Faktorregel: $m(x) = c \cdot f(x) \implies m'(x) = c \cdot f'(x), \quad c \in \mathbb{R}$

Mehr dazu findest du im [Kompetenzheft – Differenzieren I](#).

Differenzieren mit Ableitungsregeln



Am [AB – Differentialquotient](#) haben wir Ableitungen direkt aus der Definition ermittelt:

$$f(x) = 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 4 \implies f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dots = 6 \cdot x + 6$$

Nun können wir diese Ableitung mit den Ableitungsregeln und der Regel $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ ermitteln:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3 \cdot x^2)' + (6 \cdot x + 4)' = \\ &= 3 \cdot (x^2)' + 6 = \\ &= 6 \cdot x + 6 \end{aligned}$$

Polynomfunktionen ableiten



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Ermittle die Ableitungsfunktion mithilfe der Ableitungsregeln.

a) $a(x) = 6 \cdot x^7 + 5 \cdot x^3 \implies a'(x) = 42 \cdot x^6 + 15 \cdot x^2$

b) $b(x) = 3 \cdot x^4 - 2 \cdot x^3 + x^2 - 3 \cdot x + 5 \implies b'(x) = 12 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 3$

c) $c(x) = \frac{5}{3} \cdot x^7 - \frac{3}{8} \cdot x^4 + \frac{1}{4} \cdot x^2 - 3 \implies c'(x) = \frac{35}{3} \cdot x^6 - \frac{3}{2} \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot x$

d) $d(x) = -\frac{3}{2} \cdot x^6 + x^3 - x \implies d'(x) = -9 \cdot x^5 + 3 \cdot x^2 - 1$

Potenz- und Wurzelfunktionen ableiten



Σ \int
 Π \sin

MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Die Ableitung der Potenzfunktion $f(x) = x^q$ mit $q \in \mathbb{R}$ ist $f'(x) = q \cdot x^{q-1}$.

Beim Ableiten einer Potenzfunktion multiplizieren wir also mit dem Exponenten und verkleinern danach den Exponenten um 1.

Zum Beispiel:

Erinnere dich an die Potenzschreibweise und die Wurzelschreibweise.

a) $a(x) = x^{42} \implies a'(x) = 42 \cdot x^{41}$

b) $b(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \implies b'(x) = (-2) \cdot x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$ für alle $x \neq 0$

c) $c(x) = \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}} \implies c'(x) = \frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{x}}$ für alle $x > 0$

d) $d(x) = x^\pi = x^{3,1415\dots} \implies d'(x) = \pi \cdot x^{\pi-1} = \pi \cdot x^{2,1415\dots}$ für alle $x > 0$

Eine Herleitung der Regeln für $q = -1$ und $q = \frac{1}{2}$ findest du im **Kompetenzheft – Differenzieren I**.

Potenz- und Wurzelfunktionen ableiten



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Ermittle die Ableitungsfunktion von $f(x) = 4 \cdot x^3 - \frac{3}{x} + 8 \cdot \sqrt{x}$.

$$f(x) = 4 \cdot x^3 - 3 \cdot x^{-1} + 8 \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 4 \cdot 3 \cdot x^2 - 3 \cdot (-1) \cdot x^{-2} + 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = 12 \cdot x^2 + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{\sqrt{x}}$$

Exponential- und Logarithmusfunktionen ableiten



Σ \int
 Π \sin

MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Die Ableitung der Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ ist $f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$.

Die Ableitung der Logarithmusfunktion $g(x) = \log_a(x)$ ist $g'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$.

Natürliche Exponentialfunktion & Logarithmusfunktion ableiten



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Ist die Basis a die Eulersche Zahl $e = 2,71828\dots$, dann gilt also:

$$f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x \qquad g(x) = \ln(x) \implies g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\ln(e) = 1$$

Exponential- und Logarithmusfunktionen ableiten



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Ermittle die Ableitungsfunktion von $f(x) = 4 \cdot e^x - 5 \cdot x^e + \frac{2}{3} \cdot \ln(x)$.

$$f'(x) = 4 \cdot e^x - 5 \cdot e \cdot x^{e-1} + \frac{2}{3 \cdot x}$$

Winkelfunktionen ableiten



Σ ∫
Π sin

MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Die Ableitung der Winkelfunktion $f(x) = \sin(x)$ ist $f'(x) = \cos(x)$.

Die Ableitung der Winkelfunktion $g(x) = \cos(x)$ ist $g'(x) = -\sin(x)$.

Die Ableitung der Winkelfunktion $h(x) = \tan(x)$ ist $g'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$.



Der Winkel x wird im **Bogenmaß** gemessen.

$$1 + \tan^2(x) = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Winkelfunktionen ableiten



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Ermittle die Ableitungsfunktion von $f(x) = 0,2 \cdot \sin(x) + \frac{5 \cdot \sin(x)}{\cos(x)} - 3 \cdot \cos(x)$.

$$f'(x) = 0,2 \cdot \cos(x) + \frac{5}{\cos^2(x)} + 3 \cdot \sin(x)$$

Produktregel, Quotientenregel & Kettenregel



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Die Ableitung von $p(x) = x^2 \cdot \sin(x)$ ist *nicht* $f(x) = 2 \cdot x \cdot \cos(x)$.

Die Ableitung von $q(x) = \frac{x^2}{\sin(x)}$ ist *nicht* $f(x) = \frac{2 \cdot x}{\cos(x)}$.

Die Ableitung von $k(x) = \sin(x^2)$ ist *nicht* $f(x) = \cos(2 \cdot x)$.

Wir verwenden die Produkt-, Quotienten- und Kettenregel, um die Ableitungen *richtig* zu ermitteln.

Produktregel



Σ ∫
Π sin

MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Die Ableitung der Funktion $p(x) = a(x) \cdot b(x)$ ermitteln wir mit der **Produktregel**:

$$p'(x) = a'(x) \cdot b(x) + a(x) \cdot b'(x)$$

Zum Beispiel: $p(x) = \underbrace{x^2}_{a(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{b(x)} \implies p'(x) = \underbrace{2 \cdot x}_{a'(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{b(x)} + \underbrace{x^2}_{a(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{b'(x)}$

Produktregel



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Ermittle die Ableitungsfunktion von $p(x) = 5 \cdot x^3 \cdot \ln(x) + 2 \cdot \cos(x) \cdot e^x$.

$$\begin{aligned} p'(x) &= 15 \cdot x^2 \cdot \ln(x) + 5 \cdot x^3 \cdot \frac{1}{x} + (-2) \cdot \sin(x) \cdot e^x + 2 \cdot \cos(x) \cdot e^x = \\ &= 15 \cdot x^2 \cdot \ln(x) + 5 \cdot x^2 - 2 \cdot \sin(x) \cdot e^x + 2 \cdot \cos(x) \cdot e^x \end{aligned}$$

Quotientenregel



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Die Ableitung der Funktion $q(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ ermitteln wir mit der **Quotientenregel**:

$$q'(x) = \frac{a'(x) \cdot b(x) - a(x) \cdot b'(x)}{b(x)^2}$$

Zum Beispiel: $q(x) = \frac{\sin(x)}{x} \implies q'(x) = \frac{\cos(x) \cdot x - \sin(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2}$

Quotientenregel



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Ermittle die Ableitungsfunktion von $q(x) = \frac{3 \cdot x - 1}{x^2 + 1}$ und vereinfache so weit wie möglich.

$$q'(x) = \frac{3 \cdot (x^2 + 1) - (3 \cdot x - 1) \cdot 2 \cdot x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3 \cdot x^2 + 3 - 6 \cdot x^2 + 2 \cdot x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 3}{(x^2 + 1)^2}$$

Kettenregel



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Die Ableitung der Funktion $k(x) = f(g(x))$ ermitteln wir mit der **Kettenregel**:

$$k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Zum Beispiel: $k(x) = \sin(x^2) \implies k'(x) = \cos(x^2) \cdot 2 \cdot x$

Bei dieser Funktion k steckt nämlich eine quadratische Funktion in der Sinusfunktion:

Innere Funktion: $g(x) = x^2 \implies g'(x) = 2 \cdot x$

Äußere Funktion: $f(\odot) = \sin(\odot) \implies f'(\odot) = \cos(\odot)$

$$k(x) = \sin(x^2) = f(g(x)) \implies k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos(x^2) \cdot 2 \cdot x$$

Kettenregel



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Ermittle die Ableitungsfunktion von $k(x) = \ln(4 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 4)$.

$$k'(x) = \frac{1}{4 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 4} \cdot (8 \cdot x - 5) = \frac{8 \cdot x - 5}{4 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 4}$$

Drei Wege, ein Ziel



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

Ermittle die Ableitungsfunktion von $f(x) = (4 \cdot x - 2)^2 \dots$

1) ... mit der Kettenregel. 2) ... mit der Produktregel. 3) ... indem du zuerst ausmultiplizierst.

1) $f(x) = (4 \cdot x - 2)^2 \rightsquigarrow$ Kettenregel

$$\implies f'(x) = 2 \cdot (4 \cdot x - 2)^1 \cdot 4 = 32 \cdot x - 16$$

2) $f(x) = (4 \cdot x - 2) \cdot (4 \cdot x - 2) \rightsquigarrow$ Produktregel

$$\implies f'(x) = 4 \cdot (4 \cdot x - 2) + (4 \cdot x - 2) \cdot 4 = 16 \cdot x - 8 + 16 \cdot x - 8 = 32 \cdot x - 16$$

3) $f(x) = 16 \cdot x^2 - 16 \cdot x + 4$

$$\implies f'(x) = 32 \cdot x - 16$$