Summenregel, Differenzregel & Faktorregel

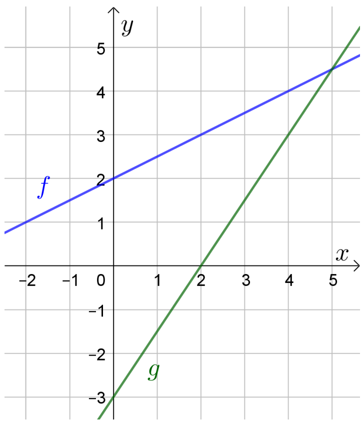
In den Bildern unten siehst du die Graphen der linearen Funktionen f und g.
Ermittle ihre Funktionsgleichungen:

$f(x) = \boxed{}$ $\qquad g(x) = \boxed{}$

Stelle eine Gleichung der Funktion $s = f + g$ auf:

$s(x) = \boxed{}$

Zeichne den Graphen von s ein:



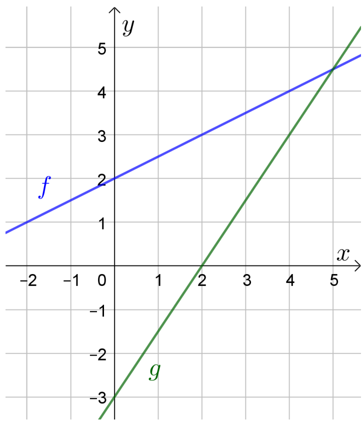
Für die Steigungen gilt:

$s'(x) = \boxed{} = f'(x) + g'(x)$

Stelle eine Gleichung der Funktion $d = f - g$ auf:

$d(x) = \boxed{}$

Zeichne den Graphen von d ein:



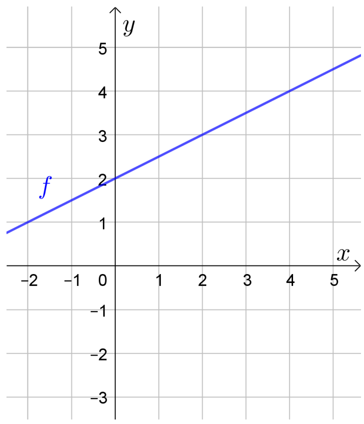
Für die Steigungen gilt:

$d'(x) = \boxed{} = f'(x) - g'(x)$

Stelle eine Gleichung der Funktion $m = \frac{1}{2} \cdot f$ auf:

$m(x) = \boxed{}$

Zeichne den Graphen von m ein:



Für die Steigungen gilt:

$m'(x) = \boxed{} = \frac{1}{2} \cdot f'(x)$

Summenregel, Differenzregel & Faktorregel

Für alle differenzierbaren Funktionen f und g gelten die folgenden Ableitungsregeln:

Summenregel: $s(x) = f(x) + g(x) \implies s'(x) = f'(x) + g'(x)$

Differenzregel: $d(x) = f(x) - g(x) \implies d'(x) = f'(x) - g'(x)$

Faktorregel: $m(x) = c \cdot f(x) \implies m'(x) = c \cdot f'(x), \quad c \in \mathbb{R}$

Mehr dazu findest du im Kompetenzheft – Differenzieren I.

Differenzieren mit Ableitungsregeln

Am AB – Differentialquotient haben wir Ableitungen direkt aus der Definition ermittelt:

$$f(x) = 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 4 \implies f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \ldots = 6 \cdot x + 6$$

Nun können wir diese Ableitung mit den Ableitungsregeln und der Regel $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ ermitteln:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3 \cdot x^2)' + (6 \cdot x + 4)' = \\ &= 3 \cdot (x^2)' + 6 = \\ &= 6 \cdot x + 6 \end{aligned}$$

Polynomfunktionen ableiten

Ermittle die Ableitungsfunktion mithilfe der Ableitungsregeln.

a) $a(x) = 6 \cdot x^7 + 5 \cdot x^3 \implies a'(x) =$

b) $b(x) = 3 \cdot x^4 - 2 \cdot x^3 + x^2 - 3 \cdot x + 5 \implies b'(x) =$

c) $c(x) = \frac{5}{3} \cdot x^7 - \frac{3}{8} \cdot x^4 + \frac{1}{4} \cdot x^2 - 3 \implies c'(x) =$

d) $d(x) = -\frac{3}{2} \cdot x^6 + x^3 - x \implies d'(x) =$

Potenz- und Wurzelfunktionen ableiten

Die Ableitung der Potenzfunktion $\boldsymbol{f(x) = x^q}$ mit $q \in \mathbb{R}$ ist $\boldsymbol{f'(x) = q \cdot x^{q-1}}$.

Beim Ableiten einer Potenzfunktion multiplizieren wir also mit dem Exponenten und verkleinern danach den Exponenten um 1.

Zum Beispiel:

Erinnere dich an die Potenzschreibweise und die Wurzelschreibweise.

a) $a(x) = x^{42} \implies a'(x) = 42 \cdot x^{41}$

b) $b(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \implies b'(x) = (-2) \cdot x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$ für alle $x \neq 0$

c) $c(x) = \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}} \implies c'(x) = \frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{x}}$ für alle $x > 0$

d) $d(x) = x^{\pi} = x^{3,1415\ldots} \implies d'(x) = \pi \cdot x^{\pi-1} = \pi \cdot x^{2,1415\ldots}$ für alle $x > 0$

Eine Herleitung der Regeln für $q = -1$ und $q = \frac{1}{2}$ findest du im Kompetenzheft – Differenzieren I.

Potenz- und Wurzelfunktionen ableiten

Ermittle die Ableitungsfunktion von $f(x) = 4 \cdot x^3 - \frac{3}{x} + 8 \cdot \sqrt{x}$.

Exponential- und Logarithmusfunktionen ableiten

Die Ableitung der Exponentialfunktion $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ ist $\boldsymbol{f'(x) = a^x \cdot \ln(a)}$.

Die Ableitung der Logarithmusfunktion $\boldsymbol{g(x) = \log_a(x)}$ ist $\boldsymbol{g'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}}$.

Natürliche Exponentialfunktion & Logarithmusfunktion ableiten

Ist die Basis a die Eulersche Zahl $e = 2{,}718\,28\ldots$, dann gilt also:

$\ln(e) = 1$

$f(x) = e^x \implies f'(x) = \boxed{}$ $g(x) = \ln(x) \implies g'(x) = \boxed{}$

Exponential- und Logarithmusfunktionen ableiten

Ermittle die Ableitungsfunktion von $f(x) = 4 \cdot e^x - 5 \cdot x^e + \frac{2}{3} \cdot \ln(x)$.

Winkelfunktionen ableiten

Die Ableitung der Winkelfunktion $\boldsymbol{f(x) = \sin(x)}$ ist $\boldsymbol{f'(x) = \cos(x)}$.

Die Ableitung der Winkelfunktion $\boldsymbol{g(x) = \cos(x)}$ ist $\boldsymbol{g'(x) = -\sin(x)}$.

Die Ableitung der Winkelfunktion $\boldsymbol{h(x) = \tan(x)}$ ist $\boldsymbol{g'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)}$.

⚠ Der Winkel x wird im Bogenmaß gemessen.

$1 + \tan^2(x) = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Winkelfunktionen ableiten

Ermittle die Ableitungsfunktion von $f(x) = 0{,}2 \cdot \sin(x) + \dfrac{5 \cdot \sin(x)}{\cos(x)} - 3 \cdot \cos(x)$.

Produktregel, Quotientenregel & Kettenregel

Die Ableitung von $p(x) = x^2 \cdot \sin(x)$ ist *nicht* $f(x) = 2 \cdot x \cdot \cos(x)$.

Die Ableitung von $q(x) = \dfrac{x^2}{\sin(x)}$ ist *nicht* $f(x) = \dfrac{2 \cdot x}{\cos(x)}$.

Die Ableitung von $k(x) = \sin(x^2)$ ist *nicht* $f(x) = \cos(2 \cdot x)$.

Wir verwenden die Produkt-, Quotienten- und Kettenregel, um die Ableitungen *richtig* zu ermitteln.

Produktregel

Die Ableitung der Funktion $\boldsymbol{p(x) = a(x) \cdot b(x)}$ ermitteln wir mit der **Produktregel**:

$$\boldsymbol{p'(x) = a'(x) \cdot b(x) + a(x) \cdot b'(x)}$$

Zum Beispiel: $p(x) = \underbrace{x^2}_{a(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{b(x)} \implies p'(x) = \underbrace{2 \cdot x}_{a'(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{b(x)} + \underbrace{x^2}_{a(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{b'(x)}$

Produktregel

Ermittle die Ableitungsfunktion von $p(x) = 5 \cdot x^3 \cdot \ln(x) + 2 \cdot \cos(x) \cdot e^x$.

Quotientenregel

Die Ableitung der Funktion $\boldsymbol{q(x) = \frac{a(x)}{b(x)}}$ ermitteln wir mit der **Quotientenregel**:

$$\boldsymbol{q'(x) = \frac{a'(x) \cdot b(x) - a(x) \cdot b'(x)}{b(x)^2}}$$

Zum Beispiel: $q(x) = \frac{\sin(x)}{x} \implies q'(x) = \frac{\cos(x) \cdot x - \sin(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2}$

Quotientenregel

Ermittle die Ableitungsfunktion von $q(x) = \frac{3 \cdot x - 1}{x^2 + 1}$ und vereinfache so weit wie möglich.

Kettenregel

Die Ableitung der Funktion $\boldsymbol{k(x) = f(g(x))}$ ermitteln wir mit der **Kettenregel**:

$$\boldsymbol{k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Zum Beispiel: $k(x) = \sin(x^2) \implies k'(x) = \cos(x^2) \cdot 2 \cdot x$

Bei dieser Funktion k steckt nämlich eine quadratische Funktion in der Sinusfunktion:

Innere Funktion: $g(x) = x^2 \implies g'(x) = 2 \cdot x$
Äußere Funktion: $f(☺) = \sin(☺) \implies f'(☺) = \cos(☺)$

$$k(x) = \sin(x^2) = f(g(x)) \implies k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos(x^2) \cdot 2 \cdot x$$

Kettenregel

Ermittle die Ableitungsfunktion von $k(x) = \ln(4 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 4)$.

Drei Wege, ein Ziel

Ermittle die Ableitungsfunktion von $f(x) = (4 \cdot x - 2)^2$ …

1) … mit der Kettenregel. **2)** … mit der Produktregel. **3)** … indem du zuerst ausmultiplizierst.