

Summenregel & Faktorregel



Wir untersuchen die Steigung **linearer Funktionen**. Vervollständige die Tabelle.

	$f(x)$	$g(x)$	$f(x) + g(x)$	$f(x) - g(x)$	$3 \cdot f(x)$
Funktionsterm	$4 \cdot x + 2$	$2 \cdot x - 5$	$6 \cdot x - 3$	$2 \cdot x + 7$	$12 \cdot x + 6$
Steigung	4	2	6	2	12

Summenregel & Faktorregel



Für alle **differenzierbaren** Funktionen f und g gelten die folgenden Ableitungsregeln:

i) **Summenregel:** $s(x) = f(x) \pm g(x) \implies s'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

ii) **Faktorregel:** $m(x) = c \cdot f(x) \implies m'(x) = c \cdot f'(x)$ mit $c \in \mathbb{R}$

Differenzieren mit Ableitungsregeln



Auf dem **Arbeitsblatt – Differentialquotient** haben wir die Ableitungsregel $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ sowie die folgende Ableitungsfunktion direkt aus der Definition ermittelt:

$$f(x) = 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 4 \implies f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dots = 6 \cdot x + 6$$

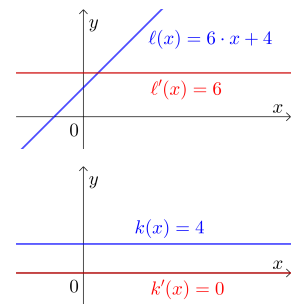
Mit der Summenregel und der Faktorregel können wir diese Ableitungsfunktion schneller ermitteln:

$$f'(x) = (3 \cdot x^2)' + (6 \cdot x + 4)' = 3 \cdot (x^2)' + 6 = 6 \cdot x + 6$$

Rechts sind die folgenden beiden Begründungen für $(6 \cdot x + 4)' = 6$ grafisch veranschaulicht:

i) Die lineare Funktion ℓ mit $\ell(x) = 6 \cdot x + 4$ hat an jeder Stelle die Steigung 6. $\implies \ell'(x) = 6$

ii) Die konstante Funktion k mit $k(x) = 4$ hat an jeder Stelle die Steigung 0. $\implies k'(x) = 0$
 $\implies (6 \cdot x + 4)' = 6 \cdot (x^1)' + (4)' = 6 \cdot 1 \cdot x^0 + 0 = 6$



Ableitungen von Polynomfunktionen



Ermittle jeweils die Ableitungsfunktion mithilfe der Ableitungsregeln.

a) $a(x) = 3 \cdot x^4 - 2 \cdot x^3 + x^2 - 3 \cdot x + 5 \implies a'(x) = 12 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 3$

b) $b(x) = \frac{5}{3} \cdot x^7 - \frac{3}{8} \cdot x^4 + \frac{1}{4} \cdot x^2 - 3 \implies b'(x) = \frac{35}{3} \cdot x^6 - \frac{3}{2} \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot x$

c) $c(x) = \frac{x^6 + x^3 - x}{12} \implies c'(x) = \frac{6 \cdot x^5 + 3 \cdot x^2 - 1}{12}$

Tangente an Polynomfunktion



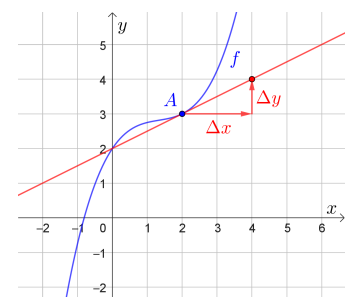
Für die rechts dargestellte Funktion f gilt: $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^3 - x^2 + \frac{3}{2} \cdot x + 2$

1) Berechne die Steigung von f an der Stelle $x = 2$.

2) Zeichne die zugehörige Tangente im Punkt A rechts ein.

$$f'(x) = \frac{3}{4} \cdot x^2 - 2 \cdot x + \frac{3}{2}$$

$$f'(2) = \frac{3}{4} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$





Für die Ableitungsfunktion der **Potenzfunktion** $f(x) = x^r$ mit $r \in \mathbb{R}$ gilt: $f'(x) = r \cdot x^{r-1}$

Erinnere dich, dass $\frac{1}{x^r} = x^{-r}$ bzw. $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ gilt.

Diese Ableitungsregel kannst du also auch auf alle Wurzelfunktionen anwenden.



Ermittle jeweils die Ableitungsfunktion mithilfe der Ableitungsregeln.

a) $a(x) = x^{4,2}$ b) $b(x) = x^\pi$ c) $c(x) = \frac{5}{x^2}$ d) $d(x) = \frac{2}{3 \cdot x}$ e) $e(x) = \sqrt{x}$ f) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

a) $a'(x) = 4,2 \cdot x^{3,2}$ b) $b'(x) = \pi \cdot x^{\pi-1}$ c) $c(x) = 5 \cdot \frac{1}{x^2} = 5 \cdot x^{-2} \implies c'(x) = -10 \cdot x^{-3} = \frac{-10}{x^3}$

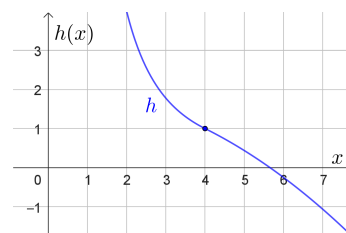
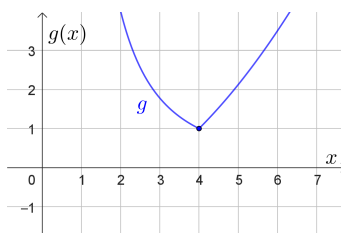
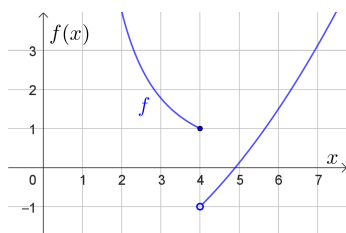
d) $d(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{3} \cdot x^{-1} \implies d'(x) = -\frac{2}{3} \cdot x^{-2} = \frac{-2}{3 \cdot x^2}$

e) $e(x) = x^{\frac{1}{2}} \implies e'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

f) $f(x) = x^{\frac{3}{4}} \implies f'(x) = \frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{x}}$



Die Graphen der Funktionen f , g und h sind dargestellt:



- Die Funktion f ist an der Stelle $x = 4$ **unstetig**:
Ihr Funktionswert springt dort von 1 auf -1.
- Die Funktion g ist an der Stelle $x = 4$ **stetig**, aber **nicht differenzierbar**:
Der Funktionsgraph hat dort einen Knick.
- Die Funktion h ist an der Stelle $x = 4$ stetig und differenzierbar.

Für die Funktion h gilt:
$$h(x) = \begin{cases} \frac{16}{x^2}, & \text{falls } x \leq 4. \\ a \cdot x^2 + b, & \text{falls } x > 4. \end{cases}$$

Berechne a und b .

Da h stetig an der Stelle $x = 4$ ist, gilt $\frac{16}{4^2} = a \cdot 4^2 + b$ und damit: I : $1 = 16 \cdot a + b$

Aus $\frac{16}{x^2} = 16 \cdot x^{-2}$ folgt:
$$h'(x) = \begin{cases} \frac{-32}{x^3}, & \text{falls } x \leq 4. \\ 2 \cdot a \cdot x, & \text{falls } x > 4. \end{cases}$$

Da h differenzierbar an der Stelle $x = 4$ ist, gilt $\frac{-32}{4^3} = 2 \cdot a \cdot 4$ und damit: II : $-\frac{1}{2} = 8 \cdot a$

$$\stackrel{\text{II}}{\implies} a = -\frac{1}{16} \stackrel{\text{I}}{\implies} b = 1 - 16 \cdot a = 2$$

Ableitungen von Exponential- und Logarithmusfunktionen



MmF

Für die Ableitungsfunktion der **Exponentialfunktion** $f(x) = a^x$ gilt: $f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$

Für die Ableitungsfunktion der **Logarithmusfunktion** $g(x) = \log_a(x)$ gilt: $g'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$

Basis e 

MmF

Wenn die Basis a die **Eulersche Zahl** $e = 2,71828\dots$ ist, dann gilt $\ln(e) = 1$ und damit:

$$f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x \qquad g(x) = \ln(x) \implies g'(x) = \frac{1}{x}$$

Ableitungen von Exponential- und Logarithmusfunktionen



MmF

Ermittle jeweils die Ableitungsfunktion mithilfe der Ableitungsregeln.

a) $f(x) = 4 \cdot e^x - 5 \cdot x^e + \frac{2}{3} \cdot \ln(x)$ b) $g(x) = 2 \cdot 3^x - \frac{5}{3^x} + \lg(x)$

a) $f'(x) = 4 \cdot e^x - 5 \cdot e \cdot x^{e-1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x}$

b) $g(x) = 2 \cdot 3^x - 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + \log_{10}(x)$

$$\implies g'(x) = 2 \cdot \ln(3) \cdot 3^x - 5 \cdot \ln\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + \frac{1}{x \cdot \ln(10)}$$

Steigung & Steigungswinkel

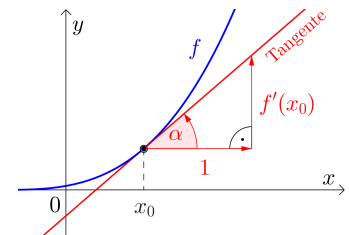


MmF

Der Graph einer Funktion f ist rechts dargestellt. An der Stelle x_0 ist die Tangente und ein zugehöriges Steigungsdreieck eingezeichnet.

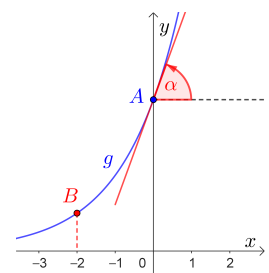
Zwischen der **Steigung** $f'(x_0)$ und dem **Steigungswinkel** α an der Stelle x_0 besteht **also** allgemein folgender Zusammenhang:

$$f'(x_0) = \tan(\alpha)$$



Für die Funktion g gilt: $g(x) = 4 \cdot 2^x$

- 1) Der Graph von g schneidet die senkrechte Achse im Punkt $A = (0 \mid 4)$.
Berechne den Steigungswinkel α im Punkt A .
- 2) Der Steigungswinkel von g im Punkt B beträgt $34,7^\circ$.
Berechne die x -Koordinate von B , und zeichne den Punkt B rechts ein.



Es gilt: $g'(x) = 4 \cdot 2^x \cdot \ln(2) = 2,772\dots \cdot 2^x$

- 1) Für den Steigungswinkel α gilt:

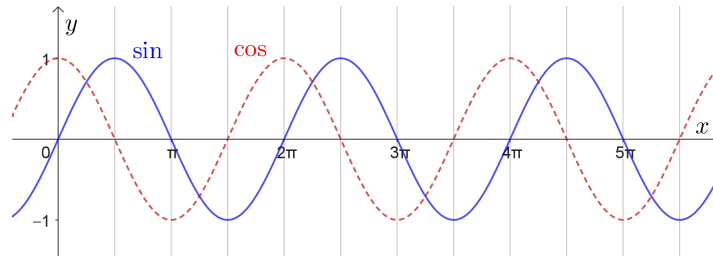
$$g'(0) = \tan(\alpha) \implies 2,772\dots = \tan(\alpha) \implies \alpha = \arctan(2,772\dots) = 70,16\dots^\circ$$

- 2) Für die x -Koordinate von B , kurz x_B , gilt:

$$g'(x_B) = \tan(34,7^\circ) \implies 2,772\dots \cdot 2^{x_B} = 0,692\dots \implies 2^{x_B} = 0,249\dots$$

$$\implies x_B = \log_2(0,249\dots) = \frac{\lg(0,249\dots)}{\lg(2)} = -2,001\dots$$

Die Graphen der Sinusfunktion und der Cosinusfunktion sind dargestellt:



Im dargestellten Bereich gilt:

- Die Sinusfunktion nimmt den maximalen Funktionswert 1 an den Stellen $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$ und $\frac{9\pi}{2}$ an. Genau an diesen Stellen wechselt das Vorzeichen der Cosinusfunktion von + auf –.
- Die Sinusfunktion nimmt den minimalen Funktionswert –1 an den Stellen $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$ und $\frac{11\pi}{2}$ an. Genau an diesen Stellen wechselt das Vorzeichen der Cosinusfunktion von – auf +.
- Der Graph der Sinusfunktion geht an den Stellen 0 , $2 \cdot \pi$ und $4 \cdot \pi$ am steilsten bergauf. Genau an diesen Stellen hat die Cosinusfunktion ein **lokales Maximum**.
- Der Graph der Sinusfunktion geht an den Stellen π , $3 \cdot \pi$ und $5 \cdot \pi$ am steilsten bergab. Genau an diesen Stellen hat die Cosinusfunktion ein **lokales Minimum**.

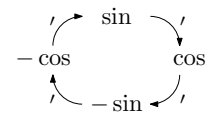
Ableitungen von Winkelfunktionen



Für die Ableitungsfunktion von $f(x) = \sin(x)$ gilt: $f'(x) = \cos(x)$

Für die Ableitungsfunktion von $g(x) = \cos(x)$ gilt: $g'(x) = -\sin(x)$

Für die Ableitungsfunktion von $h(x) = \tan(x)$ gilt: $h'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$



Damit diese Ableitungsregeln für Winkelfunktionen stimmen, muss der Winkel x im **Bogenmaß** gemessen sein.

Ableitungen von Winkelfunktionen



Für die Funktion f gilt: $f(x) = 12,4 \cdot \sin(x)$

Berechne jenen Winkel x (im Bogenmaß) in $[0; \pi]$, an dem f die Steigung 24 % hat.

$$f'(x) = 12,4 \cdot \cos(x) = 24\% \implies x = \arccos\left(\frac{0,24}{12,4}\right) = 1,5514... \text{ rad}$$

Partielle Ableitungen



Das Volumen V eines Drehzylinders hängt von seinem Radius r und seiner Höhe h ab:

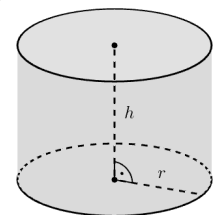
$$V(r; h) = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

- Wenn r konstant ist, dann ist $h \mapsto V(r; h)$ eine lineare Funktion.

Für ihre Ableitung schreiben wir: $\frac{\partial V}{\partial h} = \pi \cdot r^2$ Sprechweise: „ $D V$ nach $D h$ “

- Wenn h konstant ist, dann ist $r \mapsto V(r; h)$ eine **quadratische Funktion**.

Für ihre Ableitung schreiben wir: $\frac{\partial V}{\partial r} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$



Mehr dazu findest du am **AB – Funktionen in mehreren Variablen**.

