


Rechenregeln für Terme 

Folgende **Rechenregeln für Terme** gelten für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{lll} \text{T1)} a + b = b + a & \text{T3)} (a + b) + c = a + (b + c) & \text{T5)} a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \\ \text{T2)} a \cdot b = b \cdot a & \text{T4)} (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) & \end{array}$$

 Rechenregeln für Brüche 

Folgende **Rechenregeln für Brüche** gelten für alle $a, b, c, d, x \in \mathbb{R}$, falls alle Nenner $\neq 0$ sind.

$$\begin{array}{lll} \text{B1)} \frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b} & \text{B3)} \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} & \text{B5)} \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c} \\ \text{B2)} \frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c} & \text{B4)} x : \frac{a}{b} = x \cdot \frac{b}{a} & \text{B6)} \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c} \end{array}$$

 Rechenregeln für Potenzen 

Folgende **Rechenregeln für Potenzen** gelten für alle $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$.

Wenn $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt, dann stimmen die Rechenregeln auch für $a, b < 0$.

$$\begin{array}{lll} \text{P1)} a^x \cdot a^y = a^{x+y} & \text{P3)} (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x & \text{P5)} (a^x)^y = a^{x \cdot y} \\ \text{P2)} \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} & \text{P4)} \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} & \end{array}$$

 Rechenregeln für Wurzeln 

Folgende **Rechenregeln für Wurzeln** gelten für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b \geq 0$ und $k, m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq 1$, falls alle Nenner $\neq 0$ sind.

$$\begin{array}{ll} \text{W1)} \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} & \text{W3)} \sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k \\ \text{W2)} \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} & \text{W4)} \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} \end{array}$$

 Rechenregeln für Logarithmen 

Folgende **Rechenregeln für Logarithmen** gelten für alle $a, b, c, r \in \mathbb{R}$ mit $a, b, c > 0$ und $a \neq 1$.

$$\begin{array}{ll} \text{L1)} \log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c) & \text{L3)} \log_a(b^r) = r \cdot \log_a(b) \\ \text{L2)} \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c) & \end{array}$$

 Prozentrechnung & Änderungsfaktoren 

Jede Multiplikation mit einer positiven Zahl können wir als Prozentrechnung deuten:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} c \cdot 1,42 = c \cdot 142\% \quad \text{mit } c > 0 & \text{b)} c \cdot 0,42 = c \cdot 42\% \quad \text{mit } c > 0 \\ c \text{ auf } 142\% \text{ seines Werts vergrößern} & c \text{ auf } 42\% \text{ seines Werts verkleinern} \\ c \text{ um } 42\% \text{ seines Werts vergrößern} & c \text{ um } 58\% \text{ seines Werts verkleinern} \end{array}$$

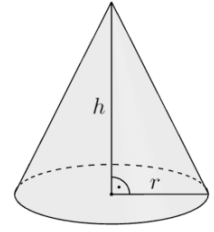
Die Zahlen 1,42 bzw. 0,42 nennen wir bei solchen Rechnungen daher auch **Änderungsfaktoren**.

Wie verändert sich ..., wenn ... ?



MmF

Für das Volumen V eines **Drehkegels** mit Radius r und Höhe h gilt: $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$



- a) Die Höhe wird um 35 % vergrößert. Der Radius bleibt gleich.
Um wie viel Prozent wird das Volumen des Drehkegels dabei größer?

- i) Für die neue Höhe h_{neu} gilt: $h_{\text{neu}} = h \cdot (100\% + 35\%) = h \cdot 1,35$
ii) Für das neue Volumen V_{neu} gilt also:

$$V_{\text{neu}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot (h \cdot 1,35)}{3} \stackrel{\text{T4}}{=} \frac{(\pi \cdot r^2 \cdot h) \cdot 1,35}{3} \stackrel{\text{B1}}{=} \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \cdot 1,35 = V \cdot 1,35$$

$$\Rightarrow V_{\text{neu}} = V \cdot 135\% \quad 135\% - 100\% = 35\%$$

Das Volumen des Drehkegels wird um 35 % größer.

- b) Der Radius wird um 23 % verkleinert. Die Höhe bleibt gleich.
Um wie viel Prozent wird das Volumen des Drehkegels dabei kleiner?

- i) Für den neuen Radius r_{neu} gilt: $r_{\text{neu}} = r \cdot (100\% - 23\%) = r \cdot 0,77$
ii) Für das neue Volumen V_{neu} gilt also:

$$V_{\text{neu}} = \frac{\pi \cdot (r \cdot 0,77)^2 \cdot h}{3} \stackrel{\text{P3}}{=} \frac{\pi \cdot (r^2 \cdot 0,77^2) \cdot h}{3} \stackrel{\text{T1}}{=} \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h \cdot 0,77^2}{3} \stackrel{\text{B1}}{=} \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \cdot 0,77^2$$

$$\stackrel{\text{B1}}{=} \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \cdot 0,77^2 = V \cdot 0,5929$$

$$\Rightarrow V_{\text{neu}} = V \cdot 59,29\% \quad 100\% - 59,29\% = 40,71\%$$

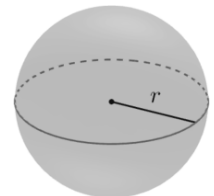
Das Volumen des Drehkegels wird um 40,71 % kleiner.

Wie muss ... verändert werden, damit ... ?



MmF

Für das Volumen V einer **Kugel** mit Radius r gilt: $V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$



Um wie viel Prozent muss der Radius der Kugel vergrößert werden, damit sich ihr Volumen verdoppelt?

- i) Zuerst **formen** wir die Formel nach r um:

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} \iff 3 \cdot V = 4 \cdot \pi \cdot r^3 \iff r^3 = \frac{3 \cdot V}{4 \cdot \pi} \iff r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V}{4 \cdot \pi}}$$

- ii) Für das neue Volumen V_{neu} soll gelten: $V_{\text{neu}} = 2 \cdot V$

- iii) Für den neuen Radius r_{neu} muss dafür gelten:

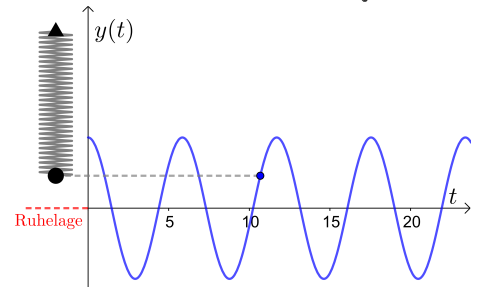
$$r_{\text{neu}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot (2 \cdot V)}{4 \cdot \pi}} \stackrel{\text{T1}}{=} \sqrt[3]{\frac{(3 \cdot V) \cdot 2}{4 \cdot \pi}} \stackrel{\text{B1}}{=} \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V}{4 \cdot \pi} \cdot 2} \stackrel{\text{W1}}{=} \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V}{4 \cdot \pi}} \cdot \sqrt[3]{2} = r \cdot 1,2599...$$

$$\Rightarrow r_{\text{neu}} = r \cdot 125,99...\% \quad 125,99...\% - 100\% = 25,99...\%$$

Der Radius der Kugel muss um 25,99... % vergrößert werden.

Bei einer **ungedämpften Schwingung** hängt die Frequenz f von der Kugelmasse m und der Federkonstante $k > 0$ ab:

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$



- a) Um wie viel Prozent wird die Frequenz kleiner, wenn die Masse verdreifacht wird?
 - b) Um wie viel Prozent muss die Masse verkleinert werden, damit die Frequenz um 10 % größer wird?
- a) Für die neue Masse m_{neu} gilt: $m_{\text{neu}} = 3 \cdot m$
Für die neue Frequenz f_{neu} gilt also:

$$f_{\text{neu}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{3 \cdot m}} \stackrel{\text{B3)}}{=} \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{k}{m}} \stackrel{\text{W1)}}{=} \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \stackrel{\text{T2)}}{=} \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} =$$

$$= f \cdot 0,5773\dots$$

$$\implies f_{\text{neu}} = f \cdot 57,73\dots \% \quad 100 \% - 57,73\dots \% = 42,26\dots \%$$

Die Frequenz wird um 42,26... % kleiner.

- b) Wir formen nach m um:

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \iff 2 \cdot \pi \cdot f = \sqrt{\frac{k}{m}} \iff 4 \cdot \pi^2 \cdot f^2 = \frac{k}{m} \iff m = \frac{k}{4 \cdot \pi^2 \cdot f^2}$$

Für die neue Frequenz f_{neu} soll gelten: $f_{\text{neu}} = f \cdot 1,1$

Für die neue Masse m_{neu} muss dafür gelten:

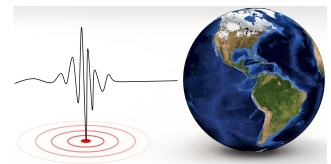
$$m_{\text{neu}} = \frac{k}{4 \cdot \pi^2 \cdot (f \cdot 1,1)^2} \stackrel{\text{P3)}}{=} \frac{k}{4 \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot 1,1^2} \stackrel{\text{B3)}}{=} \frac{k}{4 \cdot \pi^2 \cdot f^2} \cdot \frac{1}{1,1^2} = m \cdot 0,8264\dots$$

$$\implies m_{\text{neu}} = m \cdot 82,64\dots \% \quad 100 \% - 82,64\dots \% = 17,35\dots \%$$

Die Masse muss um 17,35... % verkleinert werden.

Die bei einem Erdbeben freigesetzte Energie E hängt von der Magnitude M des Erdbebens ab:

$$E = c \cdot 10^{1,5 \cdot M} \quad \text{mit } c > 0 \text{ (konstant)}$$



Trage die richtige Zahl in das Kästchen unten ein. Begründe deine Antwort.

Wenn sich die Magnituden zweier Erdbeben um 3 unterscheiden, dann ist die freigesetzte Energie beim stärkeren Erdbeben rund **31 623** Mal so groß wie beim schwächeren Erdbeben.

E ... freigesetzte Energie beim schwächeren Erdbeben

E^* ... freigesetzte Energie beim stärkeren Erdbeben

$$E^* = c \cdot 10^{1,5 \cdot (M+3)} \stackrel{\text{T5)}}{=} c \cdot 10^{1,5 \cdot M + 4,5} \stackrel{\text{P1)}}{=} c \cdot 10^{1,5 \cdot M} \cdot 10^{4,5} = E \cdot 31\,622,7\dots$$

$$\implies E^* \approx E \cdot 31\,623$$

Der pH-Wert einer Flüssigkeit hängt von ihrer Wasserstoffionen-Aktivität a ab:

$$\text{pH} = -\lg(a)$$

Trage die richtige Zahl in das Kästchen unten ein. Begründe deine Antwort.

Wenn die Wasserstoffionen-Aktivität einer Flüssigkeit auf das 10 000-fache ansteigt, dann sinkt ihr pH-Wert um 4.



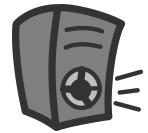
Für die neue Wasserstoffionen-Aktivität a_{neu} gilt: $a_{\text{neu}} = a \cdot 10\,000$

Für den neuen pH-Wert pH_{neu} gilt also:

$$\begin{aligned} \text{pH}_{\text{neu}} &= -\lg(a \cdot 10\,000) \stackrel{\text{L1)}}{=} -[\lg(a) + \lg(10\,000)] \stackrel{\text{T1)}}{=} -\lg(a) - \lg(10\,000) = \text{pH} - 4 \\ \Rightarrow \text{pH}_{\text{neu}} &= \text{pH} - 4 \end{aligned}$$

Der Schalldruckpegel L (in dB) hängt vom Schalldruck p (in Pa) ab:

$$L = 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{p_0}\right) \quad \text{mit } p_0 > 0 \text{ (konstant)}$$



- a) Um wieviel dB wird der Schalldruckpegel größer, wenn der Schalldruck verdoppelt wird?
 b) Um wieviel Prozent wird der Schalldruck größer, wenn der Schalldruckpegel um 1 dB größer wird?

a) Für den neuen Schalldruck p_{neu} gilt: $p_{\text{neu}} = p \cdot 2$

Für den neuen Schalldruckpegel L_{neu} gilt also:

$$\begin{aligned} L_{\text{neu}} &= 20 \cdot \lg\left(\frac{p \cdot 2}{p_0}\right) \stackrel{\text{B1)}}{=} 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{p_0} \cdot 2\right) \stackrel{\text{L1)}}{=} 20 \cdot \left[\lg\left(\frac{p}{p_0}\right) + \lg(2)\right] \stackrel{\text{T5)}}{=} \\ &\stackrel{\text{T5)}}{=} 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{p_0}\right) + 20 \cdot \lg(2) = L + 6,02... \end{aligned}$$

Der Schalldruckpegel wird um 6,02... dB größer.

b) Wir formen nach p um:

$$L = 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{p_0}\right) \iff \frac{L}{20} = \lg\left(\frac{p}{p_0}\right) \iff 10^{\frac{L}{20}} = \frac{p}{p_0} \iff p = p_0 \cdot 10^{\frac{L}{20}}$$

Für den neuen Schalldruckpegel L_{neu} gilt: $L_{\text{neu}} = L + 1$

Für den neuen Schalldruck p_{neu} gilt also:

$$\begin{aligned} p_{\text{neu}} &= p_0 \cdot 10^{\frac{L+1}{20}} \stackrel{\text{B5)}}{=} p_0 \cdot 10^{\frac{L}{20} + \frac{1}{20}} \stackrel{\text{P1)}}{=} p_0 \cdot 10^{\frac{L}{20}} \cdot 10^{\frac{1}{20}} = p \cdot 1,1220... \\ \Rightarrow p_{\text{neu}} &= p \cdot 112,20... \% \quad 112,20... \% - 100 \% = 12,20... \% \end{aligned}$$

Der Schalldruck wird um 12,20... % größer.

