Rechenregeln für Terme

Folgende **Rechenregeln für Terme** gelten für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$.

T1) $a + b = b + a$

T2) $a \cdot b = b \cdot a$

T3) $(a + b) + c = a + (b + c)$

T4) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

T5) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Rechenregeln für Brüche

Folgende **Rechenregeln für Brüche** gelten für alle $a, b, c, d, x \in \mathbb{R}$, falls alle Nenner $\neq 0$ sind.

B1) $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$

B2) $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$

B3) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

B4) $x : \frac{a}{b} = x \cdot \frac{b}{a}$

B5) $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$

B6) $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}$

Rechenregeln für Potenzen

Folgende **Rechenregeln für Potenzen** gelten für alle $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$.
Wenn $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt, dann stimmen die Rechenregeln auch für $a, b < 0$.

P1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

P2) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

P3) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

P4) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

P5) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Rechenregeln für Wurzeln

Folgende **Rechenregeln für Wurzeln** gelten für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b \geq 0$ und $k, m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq 1$, falls alle Nenner $\neq 0$ sind.

W1) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

W2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

W3) $\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$

W4) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

Rechenregeln für Logarithmen

Folgende **Rechenregeln für Logarithmen** gelten für alle $a, b, c, r \in \mathbb{R}$ mit $a, b, c > 0$ und $a \neq 1$.

L1) $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$

L2) $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$

L3) $\log_a(b^r) = r \cdot \log_a(b)$

Prozentrechnung & Änderungsfaktoren

Jede Multiplikation mit einer positiven Zahl können wir als Prozentrechnung deuten:

a) $c \cdot 1{,}42 = c \cdot 142\,\%$ mit $c > 0$

c *auf* 142 % seines Werts vergrößern

c *um* 42 % seines Werts vergrößern

b) $c \cdot 0{,}42 = c \cdot 42\,\%$ mit $c > 0$

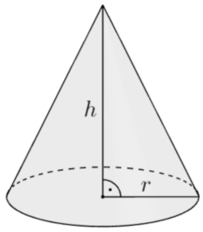
c *auf* 42 % seines Werts verkleinern

c *um* 58 % seines Werts verkleinern

Die Zahlen 1,42 bzw. 0,42 nennen wir bei solchen Rechnungen daher auch **Änderungsfaktoren**.

Wie verändert sich ..., wenn ...?

Für das Volumen V eines Drehkegels mit Radius r und Höhe h gilt: $V = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$



a) Die Höhe wird um 35 % vergrößert. Der Radius bleibt gleich.
Um wie viel Prozent wird das Volumen des Drehkegels dabei größer?

i) Für die neue Höhe h_{neu} gilt: $h_{\text{neu}} = h \cdot (100\,\% + 35\,\%) = h \cdot 1{,}35$

ii) Für das neue Volumen V_{neu} gilt also:

$$V_{\text{neu}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot (h \cdot 1{,}35)}{3} \overset{\text{T4)}}{=} \frac{(\pi \cdot r^2 \cdot h) \cdot 1{,}35}{3} \overset{\text{B1)}}{=} \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \cdot 1{,}35 = V \cdot 1{,}35$$

$$\Longrightarrow \quad V_{\text{neu}} = V \cdot 135\,\% \qquad 135\,\% - 100\,\% = 35\,\%$$

Das Volumen des Drehkegels wird um 35 % größer.

b) Der Radius wird um 23 % verkleinert. Die Höhe bleibt gleich.
Um wie viel Prozent wird das Volumen des Drehkegels dabei kleiner?

i) Für den neuen Radius r_{neu} gilt: $r_{\text{neu}} = r \cdot (100\,\% - 23\,\%) = r \cdot 0{,}77$

ii) Für das neue Volumen V_{neu} gilt also:

$$V_{\text{neu}} = \frac{\pi \cdot (r \cdot 0{,}77)^2 \cdot h}{3} \overset{\text{P3)}}{=} \frac{\pi \cdot (r^2 \cdot 0{,}77^2) \cdot h}{3} \overset{\text{T)}}{=} \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h \cdot 0{,}77^2}{3} \overset{\text{B1)}}{=}$$

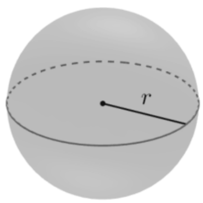
$$\overset{\text{B1)}}{=} \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \cdot 0{,}77^2 = V \cdot 0{,}5929$$

$$\Longrightarrow \quad V_{\text{neu}} = V \cdot 59{,}29\,\% \qquad 100\,\% - 59{,}29\,\% = 40{,}71\,\%$$

Das Volumen des Drehkegels wird um 40,71 % kleiner.

Wie muss ... verändert werden, damit ...?

Für das Volumen V einer Kugel mit Radius r gilt: $V = \dfrac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$



Um wie viel Prozent muss der Radius der Kugel vergrößert werden, damit sich ihr Volumen verdoppelt?

i) Zuerst formen wir die Formel nach r um:

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} \iff 3 \cdot V = 4 \cdot \pi \cdot r^3 \iff r^3 = \frac{3 \cdot V}{4 \cdot \pi} \iff r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V}{4 \cdot \pi}}$$

ii) Für das neue Volumen V_{neu} soll gelten: $V_{\text{neu}} = 2 \cdot V$

iii) Für den neuen Radius r_{neu} muss dafür gelten:

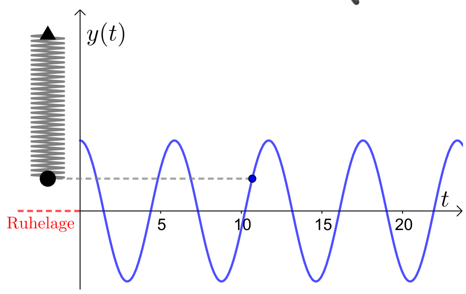
$$r_{\text{neu}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot (2 \cdot V)}{4 \cdot \pi}} \overset{\text{T)}}{=} \sqrt[3]{\frac{(3 \cdot V) \cdot 2}{4 \cdot \pi}} \overset{\text{B1)}}{=} \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V}{4 \cdot \pi} \cdot 2} \overset{\text{W1)}}{=} \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V}{4 \cdot \pi}} \cdot \sqrt[3]{2} = r \cdot 1{,}2599\ldots$$

$$\Longrightarrow \quad r_{\text{neu}} = r \cdot 125{,}99\ldots\,\% \qquad 125{,}99\ldots\,\% - 100\,\% = 25{,}99\ldots\,\%$$

Der Radius der Kugel muss um 25,99... % vergrößert werden.

Ungedämpfte Schwingung

Bei einer ungedämpften Schwingung hängt die Frequenz f von der Kugelmasse m und der Federkonstante $k > 0$ ab:



$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

a) Um wie viel Prozent wird die Frequenz kleiner, wenn die Masse verdreifacht wird?

b) Um wie viel Prozent muss die Masse verkleinert werden, damit die Frequenz um 10 % größer wird?

a) Für die neue Masse m_{neu} gilt: $m_{\text{neu}} = 3 \cdot m$

Für die neue Frequenz f_{neu} gilt also:

$$f_{\text{neu}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{3 \cdot m}} \overset{\text{B3)}}{=} \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{k}{m}} \overset{\text{W1)}}{=} \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \overset{\text{T2)}}{=} \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} =$$
$$= f \cdot 0{,}5773\ldots$$

$$\implies f_{\text{neu}} = f \cdot 57{,}73\ldots\,\% \qquad 100\,\% - 57{,}73\ldots\,\% = 42{,}26\ldots\,\%$$

Die Frequenz wird um 42,26... % kleiner.

b) Wir formen nach m um:

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \iff 2 \cdot \pi \cdot f = \sqrt{\frac{k}{m}} \iff 4 \cdot \pi^2 \cdot f^2 = \frac{k}{m} \iff m = \frac{k}{4 \cdot \pi^2 \cdot f^2}$$

Für die neue Frequenz f_{neu} soll gelten: $f_{\text{neu}} = f \cdot 1{,}1$

Für die neue Masse m_{neu} muss dafür gelten:

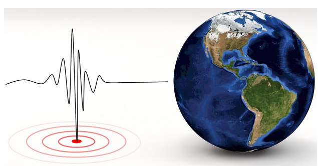
$$m_{\text{neu}} = \frac{k}{4 \cdot \pi^2 \cdot (f \cdot 1{,}1)^2} \overset{\text{P3)}}{=} \frac{k}{4 \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot 1{,}1^2} \overset{\text{B3)}}{=} \frac{k}{4 \cdot \pi^2 \cdot f^2} \cdot \frac{1}{1{,}1^2} = m \cdot 0{,}8264\ldots$$

$$\implies m_{\text{neu}} = m \cdot 82{,}64\ldots\,\% \qquad 100\,\% - 82{,}64\ldots\,\% = 17{,}35\ldots\,\%$$

Die Masse muss um 17,35... % verkleinert werden.

Erdbebenstärke

Die bei einem Erdbeben freigesetzte Energie E hängt von der Magnitude M des Erdbebens ab:



$$E = c \cdot 10^{1{,}5 \cdot M} \qquad \text{mit } c > 0 \text{ (konstant)}$$

Trage die richtige Zahl in das Kästchen unten ein. Begründe deine Antwort.

Wenn sich die Magnituden zweier Erdbeben um 3 unterscheiden, dann ist die freigesetzte Energie beim stärkeren Erdbeben rund 31 623 Mal so groß wie beim schwächeren Erdbeben.

E ... freigesetzte Energie beim schwächeren Erdbeben
E^* ... freigesetzte Energie beim stärkeren Erdbeben

$$E^* = c \cdot 10^{1{,}5 \cdot (M+3)} \overset{\text{T5)}}{=} c \cdot 10^{1{,}5 \cdot M + 4{,}5} \overset{\text{P1)}}{=} c \cdot 10^{1{,}5 \cdot M} \cdot 10^{4{,}5} = E \cdot 31\,622{,}7\ldots$$

$$\implies E^* \approx E \cdot 31\,623$$

pH-Wert

Der pH-Wert einer Flüssigkeit hängt von ihrer Wasserstoffionen-Aktivität a ab:

$$\mathrm{pH} = -\lg(a)$$

Trage die richtige Zahl in das Kästchen unten ein. Begründe deine Antwort.

Wenn die Wasserstoffionen-Aktivität einer Flüssigkeit auf das 10 000-fache ansteigt, dann sinkt ihr pH-Wert um 4.

Für die neue Wasserstoffionen-Aktivität a_{neu} gilt: $a_{\text{neu}} = a \cdot 10\,000$

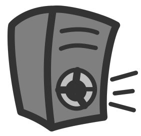
Für den neuen pH-Wert pH_{neu} gilt also:

$$\mathrm{pH}_{\text{neu}} = -\lg(a \cdot 10\,000) \overset{\text{L1)}}{=} -[\lg(a) + \lg(10\,000)] \overset{\text{T)}}{=} -\lg(a) - \lg(10\,000) = \mathrm{pH} - 4$$

$$\implies \mathrm{pH}_{\text{neu}} = \mathrm{pH} - 4$$

Schalldruckpegel

Der Schalldruckpegel L (in dB) hängt vom Schalldruck p (in Pa) ab:



$$L = 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{p_0}\right) \qquad \text{mit } p_0 > 0 \text{ (konstant)}$$

a) Um wieviel dB wird der Schalldruckpegel größer, wenn der Schalldruck verdoppelt wird?

b) Um wieviel Prozent wird der Schalldruck größer, wenn der Schalldruckpegel um 1 dB größer wird?

a) Für den neuen Schalldruck p_{neu} gilt: $p_{\text{neu}} = p \cdot 2$

Für den neuen Schalldruckpegel L_{neu} gilt also:

$$L_{\text{neu}} = 20 \cdot \lg\left(\frac{p \cdot 2}{p_0}\right) \overset{\text{B1)}}{=} 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{p_0} \cdot 2\right) \overset{\text{L1)}}{=} 20 \cdot \left[\lg\left(\frac{p}{p_0}\right) + \lg(2)\right] \overset{\text{T5)}}{=}$$

$$\overset{\text{T5)}}{=} 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{p_0}\right) + 20 \cdot \lg(2) = L + 6{,}02\ldots$$

Der Schalldruckpegel wird um 6,02... dB größer.

b) Wir formen nach p um:

$$L = 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{p_0}\right) \iff \frac{L}{20} = \lg\left(\frac{p}{p_0}\right) \iff 10^{\frac{L}{20}} = \frac{p}{p_0} \iff p = p_0 \cdot 10^{\frac{L}{20}}$$

Für den neuen Schalldruckpegel L_{neu} gilt: $L_{\text{neu}} = L + 1$

Für den neuen Schalldruck p_{neu} gilt also:

$$p_{\text{neu}} = p_0 \cdot 10^{\frac{L+1}{20}} \overset{\text{B5)}}{=} p_0 \cdot 10^{\frac{L}{20} + \frac{1}{20}} \overset{\text{P1)}}{=} p_0 \cdot 10^{\frac{L}{20}} \cdot 10^{\frac{1}{20}} = p \cdot 1{,}1220\ldots$$

$$\implies p_{\text{neu}} = p \cdot 112{,}20\ldots\,\% \qquad 112{,}20\ldots\,\% - 100\,\% = 12{,}20\ldots\,\%$$

Der Schalldruck wird um 12,20... % größer.