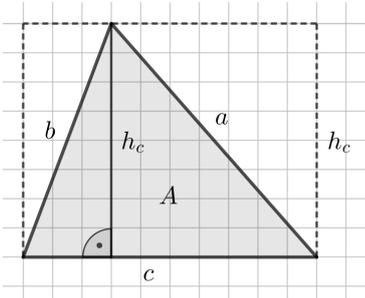


Dreieck – Flächeninhalt



Kennst du von einem Dreieck eine Seitenlänge und eine zugehörige Höhe, dann kannst du seinen **Flächeninhalt A** mit der folgenden Formel berechnen:

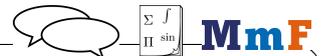
$$A = \frac{c \cdot h_c}{2} \quad \text{„Seite mal zugehöriger Höhe durch 2.“}$$



Begründe, warum die Formel im dargestellten Dreieck stimmt.

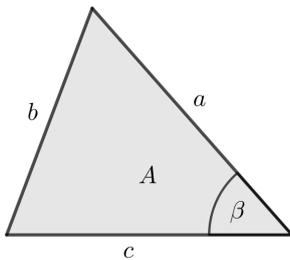
Tatsächlich gilt diese Formel für *alle* Dreiecke, auch für stumpfwinkelige Dreiecke.

Trigonometrische Flächenformel



Kennst du von einem Dreieck zwei Seitenlängen und den eingeschlossenen Winkel, dann kannst du seinen **Flächeninhalt A** mit der **trigonometrischen Flächenformel** berechnen:

$$A = \frac{a \cdot c \cdot \sin(\beta)}{2} \quad \text{„Seite mal Seite mal Sinus des eingeschlossenen Winkels durch 2.“}$$

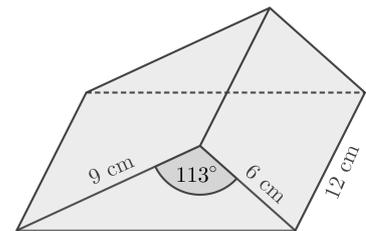


Zeichne im Dreieck links die Höhe auf c ein.  
Begründe damit, dass die Formel im dargestellten Dreieck stimmt.

Tatsächlich gilt diese Formel für *alle* Dreiecke, auch für stumpfwinkelige Dreiecke. Was passiert bei  $\beta = 90^\circ$ ?

Prisma MmF

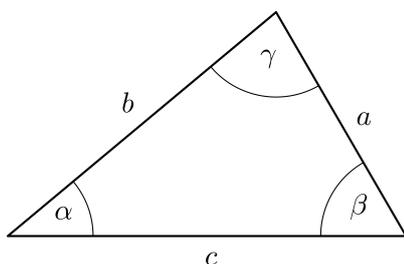
Rechts ist ein gerades **Prisma** dargestellt. Berechne sein Volumen.



Ein Zufall? MmF

Miss im Dreieck unten die Winkel und Seitenlängen ab.  
Berechne dann mit dem Taschenrechner die angegebenen Verhältnisse.

Hast du eine Vermutung?



$\alpha = \boxed{\phantom{000}}$

$a = \boxed{\phantom{000}} \text{ mm}$

$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \boxed{\phantom{000}}$

$\beta = \boxed{\phantom{000}}$

$b = \boxed{\phantom{000}} \text{ mm}$

$\frac{b}{\sin(\beta)} = \boxed{\phantom{000}}$

$\gamma = \boxed{\phantom{000}}$

$c = \boxed{\phantom{000}} \text{ mm}$

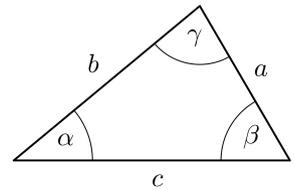
$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \boxed{\phantom{000}}$

Sinussatz 

In *jedem* Dreieck gilt der **Sinussatz**:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

„Seite durch Sinus des gegenüberliegenden Winkels ist für alle drei Seiten gleich groß.“



Begründe, dass der Sinussatz im dargestellten Dreieck stimmt.

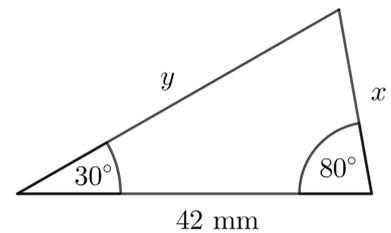
Hinweis: Berechne den Flächeninhalt mit der trigonometrischen Flächenformel auf verschiedene Arten und setze gleich.

Im Spezialfall  $\gamma = 90^\circ$  gilt  $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(90^\circ)}$ , also  $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$ . Das ist die Definition von **Sinus im rechtwinkligen Dreieck**.

Sinussatz: Seitenlängen gesucht 

Berechne die Seitenlängen  $x$  und  $y$  im dargestellten Dreieck.

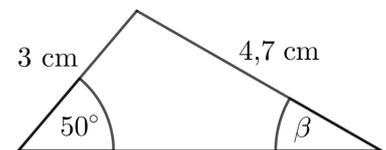
Wie würdest du dieses Dreieck **konstruieren**?



Sinussatz: Spitzer Winkel gesucht 

Berechne den *spitzen* Winkel  $\beta$  im dargestellten Dreieck.

Wie würdest du dieses Dreieck **konstruieren**?



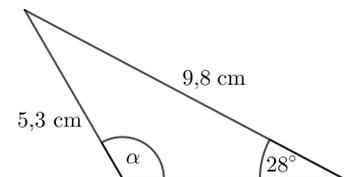
Sinussatz: Stumpfer Winkel gesucht  

Diesmal versuchen wir den dargestellten *stumpfen* Winkel  $\alpha$  mit dem Sinussatz zu berechnen:

$$\frac{5,3}{\sin(28^\circ)} = \frac{9,8}{\sin(\alpha)} \iff \sin(\alpha) = \frac{9,8 \cdot \sin(28^\circ)}{5,3}$$

$= 0,868\dots$

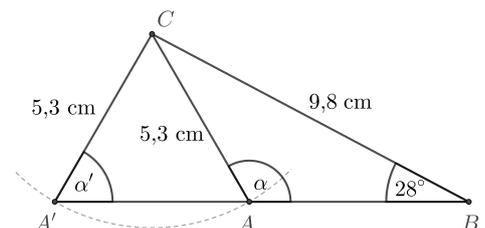
Berechne mit dem Taschenrechner:  $\arcsin(0,868\dots) =$



Tatsächlich gibt es zwei verschiedene Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle A'BC$  mit den drei oben eingezeichneten Abmessungen. Wir haben oben nicht  $\alpha$ , sondern den unten dargestellten spitzen Winkel  $\alpha'$  berechnet.

Welcher **Zusammenhang** besteht zwischen  $\alpha'$  und  $\alpha$ ?

Berechne den stumpfen Winkel  $\alpha$ .



Wenn du mit dem Sinussatz einen Winkel berechnest, musst du also wissen, ob dieser spitz oder stumpf ist.

Wenn er stumpf ist, musst du den vom Taschenrechner gelieferten spitzen Winkel auf  $180^\circ$  ergänzen.

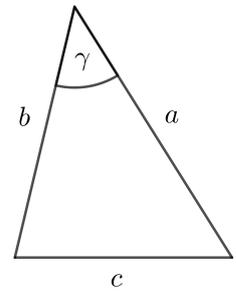
In *jedem* Dreieck gilt der **Cosinussatz**:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

„Pythagoras mit Korrekturterm  $-2$  mal Seite mal Seite mal Cosinus des eingeschlossenen Winkels.“

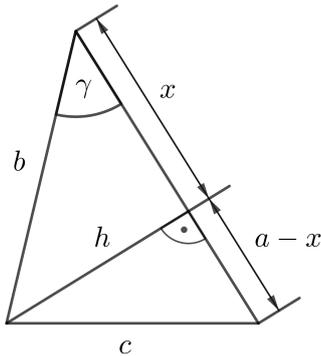
Tatsächlich ist der **Satz von Pythagoras** ein *Spezialfall* vom Cosinussatz, denn:

$$\gamma = 90^\circ \implies \cos(\gamma) = \boxed{\phantom{0}} \implies c^2 = \boxed{\phantom{0}}$$



Die unten links eingezeichnete Höhe  $h$  teilt das Dreieck in zwei rechtwinkelige Dreiecke.

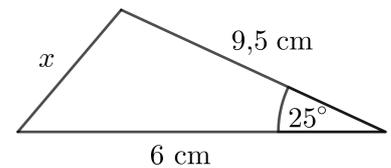
Begründe in den folgenden 4 Schritten, dass der Cosinussatz stimmt:



$$\begin{aligned}
 c^2 &= \boxed{\phantom{000000}} = \text{(Pythagoras: Unteres Dreieck)} \\
 &= \boxed{\phantom{000000}} = \text{(Binomische Formel)} \\
 &= \boxed{\phantom{000000}} = \text{(Pythagoras: Oberes Dreieck)} \\
 &= \boxed{\phantom{000000}} \text{(Cosinus: Oberes Dreieck)}
 \end{aligned}$$

**Cosinussatz: Seitenlänge gesucht** 

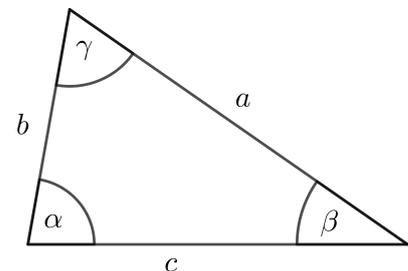
Berechne die Seitenlänge  $x$  im rechts dargestellten Dreieck.



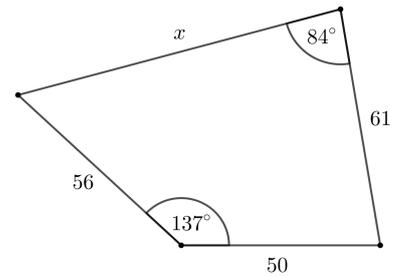
**Cosinussatz: Winkel gesucht** 

Berechne alle Winkel im dargestellten Dreieck mit  $a = 6,5$  cm,  $b = 3,8$  cm und  $c = 6$  cm.

Hinweis: Jedes Dreieck kann höchstens einen stumpfen Winkel haben. Berechne zuerst den *größten* Winkel mit dem Cosinussatz.



Rechts ist ein allgemeines Viereck dargestellt. (Seitenlängen in mm)  
 Berechne die Seitenlänge  $x$  und den Flächeninhalt des Vierecks.



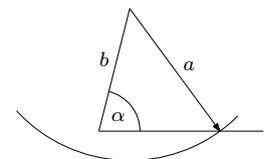
Kannst du ein Dreieck konstruieren, dann kannst du seine Seitenlängen und Winkel auch berechnen:

a) **Eine Seitenlänge und zwei Winkel** sind bekannt:

- i) Dritten Winkel mit Winkelsumme  $180^\circ$  berechnen.
- ii) Zweite und dritte Seitenlänge mit Sinussatz berechnen.

b) **Zwei Seitenlängen und der Winkel gegenüber der längeren Seite** sind bekannt:

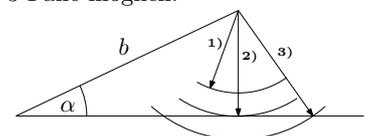
- i) (Spitzen) Winkel gegenüber der kürzeren Seite mit Sinussatz berechnen.
- ii) Dritten Winkel mit Winkelsumme  $180^\circ$  berechnen.
- iii) Dritte Seitenlänge mit Sinussatz berechnen.



c) **Zwei Seitenlängen und der Winkel gegenüber der kürzeren Seite** sind bekannt:

- i) Winkel  $\beta$  gegenüber der längeren Seite mit Sinussatz berechnen. Dabei sind 3 Fälle möglich:

- 1)  $\sin(\beta) > 1 \implies$  keine Lösung
- 2)  $\sin(\beta) = 1 \implies$  genau eine Lösung ( $\beta = 90^\circ$ )
- 3)  $\sin(\beta) < 1 \implies$  zwei Lösungen  $\beta$  und  $\beta'$  ( $\beta + \beta' = 180^\circ$ )



- ii) Dritten Winkel mit Winkelsumme  $180^\circ$  berechnen.
- iii) Dritte Seitenlänge mit Sinussatz berechnen.

d) **Zwei Seitenlängen und der eingeschlossene Winkel** sind bekannt:

- i) Dritte Seitenlänge mit Cosinussatz berechnen.
- ii) Spitzen Winkel mit Sinussatz berechnen. (Der Winkel gegenüber der kürzeren Seite ist sicher spitz.)
- iii) Dritten Winkel mit Winkelsumme  $180^\circ$  berechnen.

e) **Drei Seitenlängen** sind bekannt: (Die längste Seite **muss** kürzer als die Summe der beiden anderen Seiten sein.)

- i) Größten Winkel mit Cosinussatz berechnen. (Das ist der Winkel gegenüber der längsten Seite.)
- ii) Zweiten Winkel mit Sinussatz oder Cosinussatz berechnen. (Dieser Winkel ist sicher spitz.)
- iii) Dritten Winkel mit Winkelsumme  $180^\circ$  berechnen.

