Arithmetische Folge

Bei einer **arithmetischen Folge** (a_n) ist die **Differenz** $\boldsymbol{d}$ zweier aufeinander folgender Glieder konstant:

- $a_2 - a_1 = d$
- $a_3 - a_2 = d$
- $a_{n+1} - a_n = d$ für alle $n \geq 1$

$$(a_1 \overset{+d}{;} a_2 \overset{+d}{;} a_3 \overset{+d}{;} \ldots ; a_n \overset{+d}{;} a_{n+1}; \ldots)$$

Zum Beispiel:
$(a_n) = (5; 7; 9; 11; 13; \ldots)$

Arithmetische Folge

Trage Zahlen richtig in die Kästchen ein.

a) Die arithmetische Folge $(a_n) = (2; 5; 8; 11; 14; \ldots)$ hat die Differenz $d = 3$.

b) Die arithmetische Folge $(b_n) = (7; 5; 3; 1; -1; \ldots)$ hat die Differenz $d = -2$.

c) Die arithmetische Folge $(c_n) = (4; 4; 4; 4; 4; \ldots)$ hat die Differenz $d = 0$.

d) Die arithmetische Folge $(d_n) = (7; 11; 15; 19; 23; \ldots)$ hat die Differenz $d = 4$.

Bildungsgesetze arithmetischer Folgen

Gegeben ist die arithmetische Folge $(a_n)_{n\geq 1} = (2; 5; 8; 11; \ldots)$.

1) Ermittle ein rekursives Bildungsgesetz für (a_n).

$$a_{n+1} = a_n + 3 \quad \text{mit} \quad a_1 = 2$$

2) Berechne a_{42}.

Hinweis: Wie viele „Schritte“ sind es von a_1 zu a_{42}?

$$a_{42} = 2 + 41 \cdot 3 = 125$$

3) Ermittle ein explizites Bildungsgesetz für (a_n).

Hinweis: Wie viele „Schritte“ sind es von a_1 zu a_n?

$$a_n = 2 + (n-1) \cdot 3 = 3 \cdot n - 1$$

Bildungsgesetze arithmetischer Folgen

Allgemein hat jede arithmetische Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit Differenz d die folgenden Bildungsgesetze:

- **Rekursives Bildungsgesetz:** $\boldsymbol{a_{n+1} = a_n + d}$ und Angabe von $\boldsymbol{a_1}$
- **Explizites Bildungsgesetz:** $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$

Arithmetische Folge?

Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ enthält die Folgenglieder $a_2 = 3$, $a_6 = 5$ und $a_{16} = 11$.
Begründe, warum (a_n) *keine* arithmetische Folge sein kann.

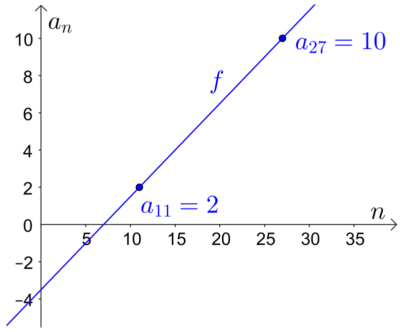
Wenn (a_n) eine arithmetische Folge wäre, dann müsste $a_6 = a_2 + 4 \cdot d$, also $d = \frac{a_6 - a_2}{4} = 0{,}5$ gelten.

Wenn (a_n) eine arithmetische Folge wäre, dann müsste $a_{16} = a_6 + 10 \cdot d$ gelten, aber $11 \neq \underbrace{5 + 10 \cdot 0{,}5}_{=10}$.

Also kann (a_n) *keine* arithmetische Folge sein.

Arithmetische Folge – Lineare Funktion

Die arithmetische Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ enthält die Folgenglieder $a_{11} = 2$ und $a_{27} = 10$.



1) Ermittle ein rekursives Bildungsgesetz und ein explizites Bildungsgesetz für (a_n).

2) Das wievielte Folgenglied hat den Wert 23?

3) Rechts sind die beiden Folgenglieder a_{11} und a_{27} in einem Koordinatensystem dargestellt.
Der Graph der linearen Funktion f enthält diese beiden Punkte.
Ermittle die Steigung von f. Was fällt dir auf?

1) $a_{27} = a_{11} + 16 \cdot d \implies d = \dfrac{a_{27} - a_{11}}{16} = \dfrac{8}{16} = 0{,}5$

$a_{11} = a_1 + 10 \cdot d \implies a_1 = a_{11} - 10 \cdot d = 2 - 5 = -3$

Rekursives Bildungsgesetz: $a_{n+1} = a_n + 0{,}5$ mit $a_1 = -3$

Explizites Bildungsgesetz: $a_n = -3 + (n-1) \cdot 0{,}5 = 0{,}5 \cdot n - 3{,}5$

2) $a_n = 23 \iff 0{,}5 \cdot n - 3{,}5 = 23 \iff 0{,}5 \cdot n = 26{,}5 \iff n = 53$

Das 53. Folgenglied hat den Wert 23.

3) Steigung $= \dfrac{a_{27} - a_{11}}{27 - 11} = \dfrac{8}{16} = 0{,}5 = d$

Carl Friedrich Gauß

1) Carl soll die Summe $s = 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100$ berechnen.
Er erkennt, dass $1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \cdots$ gilt, und addiert:

$$\begin{aligned} s &= 1 + 2 + 3 + \cdots + 100 \\ s &= 100 + 99 + 98 + \cdots + 1 \\ \hline 2 \cdot s &= 101 + 101 + 101 + \cdots + 101 \end{aligned} \implies s = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

2) Aus wie vielen Summanden besteht $2 + 5 + 8 + \cdots + 170 + 173 + 176$?
Berechne wie Carl in **1)** die Summe.

$2 + 3 \cdot x = 176 \implies x = 58$ Schritte vom ersten bis zum letzten Summanden.
Es sind also insgesamt 59 Summanden.

$$\begin{aligned} s &= 2 + 5 + 8 + \cdots + 176 \\ s &= 176 + 173 + 170 + \cdots + 2 \\ \hline 2 \cdot s &= 178 + 178 + 178 + \cdots + 178 \end{aligned} \implies s = \frac{59 \cdot 178}{2} = 5251$$

Arithmetische Reihe MmF

Für jede Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ kürzen wir mit s_n die Summe der ersten n Folgenglieder ab:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Wenn $(a_n)_{n\geq 1}$ eine **arithmetische Folge** ist, dann gilt:

$$\boldsymbol{s_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}}$$

„Ersten und letzten Summanden addieren und mit der halben Anzahl multiplizieren.“

Arithmetische Reihe MmF

Unten siehst du eine Begründung für diese Summenformel.
An welcher Stelle verwenden wir die Voraussetzung, dass (a_n) eine arithmetische Folge ist?

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$
$$s_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

$$2 \cdot s_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)}_{=(a_1+a_n)\cdot n} \implies s_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2} \checkmark$$

Da (a_n) eine arithmetische Folge ist, ist a_2 um d größer als a_1 und a_{n-1} um d kleiner als a_n.
Deshalb gilt zum Beispiel $a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$.

Arithmetische Reihe MmF

Gegeben ist die arithmetische Folge $(a_n) = (4; 7; 10; 13; \ldots)$.

1) Ermittle ein explizites Bildungsgesetz für (a_n).

2) Berechne die Summe der ersten 42 Folgenglieder von (a_n).

3) Die Summe der ersten n Folgenglieder von (a_n) beträgt 1000. Berechne n.

1) $a_n = 4 + (n-1) \cdot 3 = 3 \cdot n + 1$

2) $a_{42} = 3 \cdot 42 + 1 = 127$

$$\implies s_{42} = (a_1 + a_{42}) \cdot \frac{42}{2} = 131 \cdot 21 = 2751$$

3) $s_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2} = (3 \cdot n + 5) \cdot \frac{n}{2} = \frac{3 \cdot n^2 + 5 \cdot n}{2}$ [Probe: $s_{42} = 2751$ ✓]

$$s_n = 1000 \iff 3 \cdot n^2 + 5 \cdot n = 2000 \iff 3 \cdot n^2 + 5 \cdot n - 2000 = 0$$

Große Lösungsformel: $a = 3$, $b = 5$, $c = -2000$

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \implies n_1 = 25, \ (n_2 = -26{,}66...)$$

Die Summe der ersten 25 Folgenglieder beträgt 1000.

$1+3+5+7+\cdots+(2\cdot n-1)$

Gegeben ist die arithmetische Folge $(a_n) = (1; 3; 5; 7; 9; \ldots)$.

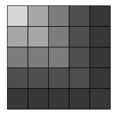
1) Berechne die Summe der ersten 1, 2, 3, 4 bzw. 5 Folgenglieder.

$s_1 = 1 \qquad s_2 = 4 \qquad s_3 = 9 \qquad s_4 = 16 \qquad s_5 = 25$

2) Zeige mithilfe der Summenformel, dass $s_n = n^2$ gilt.

$a_n = 1 + (n-1)\cdot 2 = 2\cdot n - 1$

$\implies s_n = (a_1 + a_n)\cdot \frac{n}{2} = (1 + 2\cdot n - 1)\cdot \frac{n}{2} = 2\cdot n \cdot \frac{n}{2} = n^2$ ✓



Summenzeichen

Das Summenzeichen $\sum$ (Sigma) kann zur kürzeren Darstellung von Additionen helfen.

Zum Beispiel: $\sum\limits_{k=3}^{7}(k^2 - 2\cdot k) = \underbrace{(3^2 - 2\cdot 3)}_{=3} + \underbrace{(4^2 - 2\cdot 4)}_{=8} + \underbrace{(5^2 - 2\cdot 5)}_{=15} + \underbrace{(6^2 - 2\cdot 6)}_{=24} + \underbrace{(7^2 - 2\cdot 7)}_{=35} = 85$

Setze für k jede natürliche Zahl von 3 bis 7 ein, und addiere diese 5 Summanden.

Summenzeichen

Berechne die Summe.

a) $\sum\limits_{k=1}^{3}(4\cdot k + 2) = 6 + 10 + 14 = 30$

b) $\sum\limits_{k=1}^{30}(4\cdot k + 2) = 6 + 10 + 14 + \cdots + 122 = (6 + 122)\cdot \frac{30}{2} = 1920$

c) $\sum\limits_{k=23}^{87}(4\cdot k + 2) = 94 + 98 + 102 + \cdots + 350 = (94 + 350)\cdot \frac{65}{2} = 14\,430$

Arithmetische Folge – Arithmetisches Mittel

Die arithmetische Folge (a_n) hat die Differenz d.
Zeige, dass jedes Folgenglied das arithmetische Mittel seiner beiden Nachbarglieder ist, also:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = a_n$$

Es gilt $a_{n+1} = a_n + d$ und $a_{n-1} = a_n - d$. Daraus folgt:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_n - d + a_n + d}{2} = \frac{2\cdot a_n}{2} = a_n \checkmark$$