

Arithmetische Folge



Bei einer **arithmetischen Folge** (a_n) ist die **Differenz** d zweier aufeinander folgender Glieder konstant:

- $a_2 - a_1 = d$
- $a_3 - a_2 = d$
- $a_{n+1} - a_n = d$ für alle $n \geq 1$

$$(a_1; \overset{+d}{\curvearrowright} a_2; \overset{+d}{\curvearrowright} a_3; \dots; \overset{+d}{\curvearrowright} a_n; \overset{+d}{\curvearrowright} a_{n+1}; \dots)$$

Zum Beispiel:

$$(a_n) = (5; 7; 9; 11; 13; \dots)$$

Arithmetische Folge



Trage Zahlen richtig in die Kästchen ein.

- a) Die arithmetische Folge $(a_n) = (2; 5; 8; 11; 14; \dots)$ hat die Differenz $d = 3$.
- b) Die arithmetische Folge $(b_n) = (7; 5; 3; 1; -1; \dots)$ hat die Differenz $d = -2$.
- c) Die arithmetische Folge $(c_n) = (4; 4; 4; 4; 4; \dots)$ hat die Differenz $d = 0$.
- d) Die arithmetische Folge $(d_n) = (7; 11; 15; 19; 23; \dots)$ hat die Differenz $d = 4$.

Bildungsgesetze arithmetischer Folgen



Gegeben ist die arithmetische Folge $(a_n)_{n \geq 1} = (2; 5; 8; 11; \dots)$.

- 1) Ermittle ein **rekursives Bildungsgesetz** für (a_n) .

$$a_{n+1} = a_n + 3 \quad \text{mit} \quad a_1 = 2$$

- 2) Berechne a_{42} .

Hinweis: Wie viele „Schritte“ sind es von a_1 zu a_{42} ?

$$a_{42} = 2 + 41 \cdot 3 = 125$$

- 3) Ermittle ein **explizites Bildungsgesetz** für (a_n) .

Hinweis: Wie viele „Schritte“ sind es von a_1 zu a_n ?

$$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 3 = 3 \cdot n - 1$$

Bildungsgesetze arithmetischer Folgen



Allgemein hat jede arithmetische Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ mit Differenz d die folgenden Bildungsgesetze:

- **Rekursives Bildungsgesetz:** $a_{n+1} = a_n + d$ und Angabe von a_1
- **Explizites Bildungsgesetz:** $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Arithmetische Folge?



Die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ enthält die Folgenglieder $a_2 = 3$, $a_6 = 5$ und $a_{16} = 11$.

Begründe, warum (a_n) *keine* arithmetische Folge sein kann.

Wenn (a_n) eine arithmetische Folge wäre, dann müsste $a_6 = a_2 + 4 \cdot d$, also $d = \frac{a_6 - a_2}{4} = 0,5$ gelten.

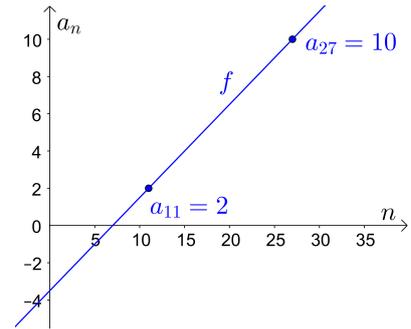
Wenn (a_n) eine arithmetische Folge wäre, dann müsste $a_{16} = a_6 + 10 \cdot d$ gelten, aber $11 \neq 5 + 10 \cdot 0,5$.

Also kann (a_n) *keine* arithmetische Folge sein.



Die arithmetische Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ enthält die Folgenglieder $a_{11} = 2$ und $a_{27} = 10$.

- 1) Ermittle ein rekursives Bildungsgesetz und ein explizites Bildungsgesetz für (a_n) .
- 2) Das wievielte Folgenglied hat den Wert 23?
- 3) Rechts sind die beiden Folgenglieder a_{11} und a_{27} in einem Koordinatensystem dargestellt. Der Graph der **linearen Funktion** f enthält diese beiden Punkte. Ermittle die **Steigung** von f . Was fällt dir auf?



$$1) a_{27} = a_{11} + 16 \cdot d \implies d = \frac{a_{27} - a_{11}}{16} = \frac{8}{16} = 0,5$$

$$a_{11} = a_1 + 10 \cdot d \implies a_1 = a_{11} - 10 \cdot d = 2 - 5 = -3$$

Rekursives Bildungsgesetz: $a_{n+1} = a_n + 0,5$ mit $a_1 = -3$

Explizites Bildungsgesetz: $a_n = -3 + (n - 1) \cdot 0,5 = 0,5 \cdot n - 3,5$

$$2) a_n = 23 \iff 0,5 \cdot n - 3,5 = 23 \iff 0,5 \cdot n = 26,5 \iff n = 53$$

Das 53. Folgenglied hat den Wert 23.

$$3) \text{Steigung} = \frac{a_{27} - a_{11}}{27 - 11} = \frac{8}{16} = 0,5 = d$$



- 1) Carl soll die Summe $s = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$ berechnen. Er erkennt, dass $1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \dots$ gilt, und addiert:

$$\begin{array}{r} s = 1 + 2 + 3 + \dots + 100 \\ s = 100 + 99 + 98 + \dots + 1 \\ \hline 2 \cdot s = 101 + 101 + 101 + \dots + 101 \implies s = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050 \end{array}$$

- 2) Aus wie vielen Summanden besteht $2 + 5 + 8 + \dots + 170 + 173 + 176$? Berechne wie Carl in 1) die Summe.

$2 + 3 \cdot x = 176 \implies x = 58$ Schritte vom ersten bis zum letzten Summanden. Es sind also insgesamt 59 Summanden.

$$\begin{array}{r} s = 2 + 5 + 8 + \dots + 176 \\ s = 176 + 173 + 170 + \dots + 2 \\ \hline 2 \cdot s = 178 + 178 + 178 + \dots + 178 \implies s = \frac{59 \cdot 178}{2} = 5251 \end{array}$$



Für jede Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ kürzen wir mit s_n die Summe der ersten n Folgenglieder ab:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Wenn $(a_n)_{n \geq 1}$ eine **arithmetische Folge** ist, dann gilt:

$$s_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2} \quad \text{„Ersten und letzten Summanden addieren und mit der halben Anzahl multiplizieren.“}$$



Unten siehst du eine Begründung für diese Summenformel.

An welcher Stelle verwenden wir die Voraussetzung, dass (a_n) eine arithmetische Folge ist?

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$s_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

$$\begin{array}{l} \hline 2 \cdot s_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)}_{=(a_1 + a_n) \cdot n} \implies s_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2} \checkmark \end{array}$$

Da (a_n) eine arithmetische Folge ist, ist a_2 um d größer als a_1 und a_{n-1} um d kleiner als a_n .
Deshalb gilt zum Beispiel $a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$.



Gegeben ist die arithmetische Folge $(a_n) = (4; 7; 10; 13; \dots)$.

- 1) Ermittle ein explizites Bildungsgesetz für (a_n) .
- 2) Berechne die Summe der ersten 42 Folgenglieder von (a_n) .
- 3) Die Summe der ersten n Folgenglieder von (a_n) beträgt 1000. Berechne n .

$$1) a_n = 4 + (n - 1) \cdot 3 = 3 \cdot n + 1$$

$$2) a_{42} = 3 \cdot 42 + 1 = 127$$

$$\implies s_{42} = (a_1 + a_{42}) \cdot \frac{42}{2} = 131 \cdot 21 = 2751$$

$$3) s_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2} = (3 \cdot n + 5) \cdot \frac{n}{2} = \frac{3 \cdot n^2 + 5 \cdot n}{2} \quad [\text{Probe: } s_{42} = 2751 \checkmark]$$

$$s_n = 1000 \iff 3 \cdot n^2 + 5 \cdot n = 2000 \iff 3 \cdot n^2 + 5 \cdot n - 2000 = 0$$

Große Lösungsformel: $a = 3, b = 5, c = -2000$

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \implies n_1 = 25, (n_2 = -26,66\dots)$$

Die Summe der ersten 25 Folgenglieder beträgt 1000.

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2 \cdot n - 1)$$


Gegeben ist die arithmetische Folge $(a_n) = (1; 3; 5; 7; 9; \dots)$.

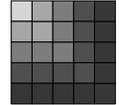
1) Berechne die Summe der ersten 1, 2, 3, 4 bzw. 5 Folgenglieder.

$$s_1 = 1 \quad s_2 = 4 \quad s_3 = 9 \quad s_4 = 16 \quad s_5 = 25$$

2) Zeige mithilfe der Summenformel, dass $s_n = n^2$ gilt.

$$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2 = 2 \cdot n - 1$$

$$\Rightarrow s_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2} = (1 + 2 \cdot n - 1) \cdot \frac{n}{2} = 2 \cdot n \cdot \frac{n}{2} = n^2 \checkmark$$



Summenzeichen  MmF

Das Summenzeichen \sum (Sigma) kann zur kürzeren Darstellung von Additionen helfen.

Zum Beispiel: $\sum_{k=3}^7 (k^2 - 2 \cdot k) = \underbrace{(3^2 - 2 \cdot 3)}_{=3} + \underbrace{(4^2 - 2 \cdot 4)}_{=8} + \underbrace{(5^2 - 2 \cdot 5)}_{=15} + \underbrace{(6^2 - 2 \cdot 6)}_{=24} + \underbrace{(7^2 - 2 \cdot 7)}_{=35} = 85$

Setze für k jede natürliche Zahl von 3 bis 7 ein, und addiere diese 5 Summanden.

Summenzeichen  MmF

Berechne die Summe.

$$\text{a) } \sum_{k=1}^3 (4 \cdot k + 2) = 6 + 10 + 14 = 30$$

$$\text{b) } \sum_{k=1}^{30} (4 \cdot k + 2) = 6 + 10 + 14 + \dots + 122 = (6 + 122) \cdot \frac{30}{2} = 1920$$

$$\text{c) } \sum_{k=23}^{87} (4 \cdot k + 2) = 94 + 98 + 102 + \dots + 350 = (94 + 350) \cdot \frac{65}{2} = 14\,430$$

Arithmetische Folge – Arithmetisches Mittel  MmF

Die arithmetische Folge (a_n) hat die Differenz d .

Zeige, dass jedes Folgenglied das **arithmetische Mittel** seiner beiden Nachbarglieder ist, also:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = a_n$$

Es gilt $a_{n+1} = a_n + d$ und $a_{n-1} = a_n - d$. Daraus folgt:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_n - d + a_n + d}{2} = \frac{2 \cdot a_n}{2} = a_n \checkmark$$

