Grenzwerte

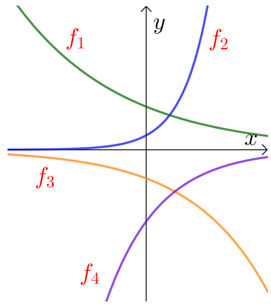
Ist $\mathbf{0 < a < 1}$, dann werden die Zahlen a^1, a^2, a^3, a^4, … immer kleiner und kommen der Zahl 0 beliebig nahe. Wir schreiben kurz: $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ bzw. $a^n \to 0$

Ist $\mathbf{a > 1}$, dann werden die Zahlen a^1, a^2, a^3, a^4, … immer größer und überschreiten jede noch so große Zahl. Wir schreiben kurz: $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$ bzw. $a^n \to \infty$

Asymptotisches Verhalten von $x \mapsto c \cdot a^x$

Das asymptotische Verhalten der Exponentialfunktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$ hängt von a und c ab.

Rechts sind die Graphen von 4 Exponentialfunktionen dargestellt. Beschrifte die Funktionsgraphen.



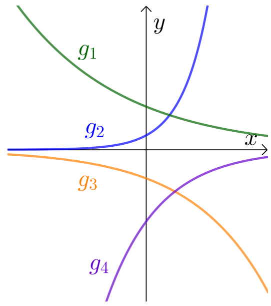
1) $f_1(x) = 1{,}2 \cdot 0{,}6^x$ **3)** $f_3(x) = -0{,}8 \cdot 2^x$

2) $f_2(x) = 0{,}4 \cdot 7{,}4^x$ **4)** $f_4(x) = -2 \cdot 0{,}4^x$

Asymptotisches Verhalten von $x \mapsto c \cdot e^{k \cdot x}$

Das asymptotische Verhalten der Exponentialfunktion g mit $g(x) = c \cdot e^{k\cdot x}$ hängt von den Vorzeichen von c und k ab.

Rechts sind die Graphen von 4 Exponentialfunktionen dargestellt. Trage passend zu den Graphen $>$ bzw. $<$ in die Kästchen ein.



1) g_1: $c > 0$ und $k < 0$ **3)** g_3: $c < 0$ und $k > 0$

2) g_2: $c > 0$ und $k > 0$ **4)** g_4: $c < 0$ und $k < 0$

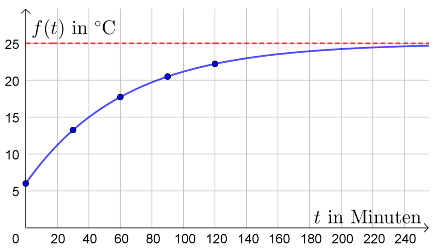
Nach oben beschränktes Wachstum

Du nimmst zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Getränk aus dem Kühlschrank und lässt es geduldig vor dir stehen.

Der Temperaturverlauf des Getränks wird durch die folgende Funktion f modelliert:

$$f(t) = 19 \cdot \left(1 - e^{-0{,}016\cdot t}\right) + 6$$

t … Zeit in Minuten ($t \geq 0$)
$f(t)$ … Getränketemperatur in °C zum Zeitpunkt t



1) Berechne die Getränketemperatur nach 0, 30, 60, 90 und 120 Minuten.

t in Minuten	0	30	60	90	120
$f(t)$ in °C	6	13,24...	17,72...	20,49...	22,21...

2) Begründe anhand der Funktionsgleichung, welchem Wert die Temperatur beliebig nahe kommt.

$$\lim_{t\to\infty} e^{-0{,}016\cdot t} = \lim_{t\to\infty} 0{,}984...^{\,t} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{t\to\infty} f(t) = 19 \cdot (1-0) + 6 = 25\,°\text{C}$$

Die Temperatur des Getränks kommt also (der Raumtemperatur) 25 °C beliebig nahe.

3) Skizziere rechts oben den Funktionsgraphen von f.

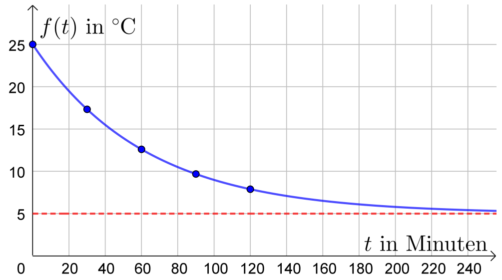
Nach unten beschränktes Wachstum

Du stellst zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Getränk in den Kühlschrank.

Der Temperaturverlauf des Getränks wird durch die folgende Funktion f modelliert:

$$f(t) = a \cdot 0{,}984^t + b$$

$t \ldots$ Zeit in Minuten ($t \geq 0$)
$f(t) \ldots$ Getränketemperatur in °C zum Zeitpunkt t



Zum Zeitpunkt $t = 0$ hat das Getränk die Temperatur 25 °C.

Die Temperatur im Kühlschrank ist konstant 5 °C.
Langfristig kommt die Getränketemperatur der Temperatur im Kühlschrank beliebig nahe.

1) Berechne a und b.

$$\lim_{t\to\infty} 0{,}984^t = 0 \implies \lim_{t\to\infty} f(t) = a \cdot 0 + b = b \implies b = 5$$

$$f(0) = 25 \iff a \cdot 1 + 5 = 25 \iff a = 20$$

2) Berechne die Getränketemperatur nach 0, 30, 60, 90 und 120 Minuten.

t in Minuten	0	30	60	90	120
$f(t)$ in °C	25	17,3...	12,5...	9,6...	7,8...

3) Skizziere rechts oben den Funktionsgraphen von f.

Logistisches Wachstum

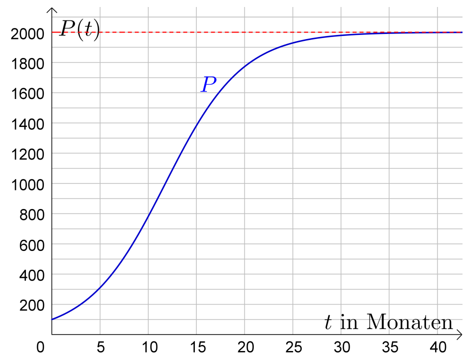
Wir setzen 100 Fische in einen Teich aus. Die Fische finden dort beste Lebensbedingungen vor.

Der Verlauf der Fischpopulation kann dann durch eine **logistische Wachstumsfunktion** modelliert werden:

$$P(t) = \frac{P_0 \cdot K}{P_0 + (K - P_0) \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}}$$

$t \ldots$ Zeit in Monaten ($t \geq 0$)
$P(t) \ldots$ Größe der Fischpopulation zum Zeitpunkt t

Der Funktionsgraph von P ist für bestimmte Werte von P_0 und K rechts dargestellt.



1) Begründe anhand der Funktionsgleichung, warum $P_0 = P(0)$ gilt. P_0 ist also die Population zu Beginn.

$$P(0) = \frac{P_0 \cdot K}{P_0 + (K - P_0) \cdot 1} = \frac{P_0 \cdot K}{K} = P_0 \checkmark$$

2) Begründe anhand der Funktionsgleichung, warum $K = \lim_{t\to\infty} P(t)$ gilt. K steht für **Kapazitätsgrenze**.

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{1}{4} \cdot t} = \lim_{t\to\infty} 0{,}7788...^t = 0 \implies \lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{P_0 \cdot K}{P_0} = K \checkmark$$

3) Lies die Parameter P_0 und K aus der Grafik rechts oben ab: $P_0 = 100$ $\quad K = 2000$

4) Berechne die Größe der Fischpopulation nach 2 Jahren. $P(24) \approx 1910$ Fische