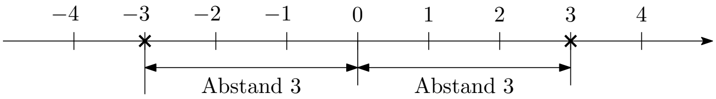
Betrag einer Zahl

Erinnere dich, dass der **Betrag** einer Zahl ihr Abstand von 0 auf der Zahlengerade ist:



Der Betrag von 3 ist also 3. Wir schreiben kurz: $|3| = 3$

Der Betrag von -3 ist auch 3. Wir schreiben kurz: $|-3| = 3$

Die senkrechten Striche heißen **Betragsstriche**.

Betragsstriche werden wie Klammern zuerst ausgewertet: $\overbrace{|3-5|\cdot 2}^{=|-2|\cdot 2=4} \neq \overbrace{3-5\cdot 2}^{=-7}$

Betragsstriche entfernen

Das Ergebnis von $|x|$ hängt vom Vorzeichen von x ab. Stelle jeweils mithilfe von x eine Formel auf:

- **Fall 1:** Wenn $x \geq 0$ ist, dann gilt: $|x| = x$
- **Fall 2:** Wenn $x < 0$ ist, dann gilt: $|x| = -x$

Zum Beispiel: $|3| = 3$
$|-3| = -(-3) = 3$

Beachte, dass $-x$ eine *positive* Zahl ist, wenn x eine *negative* Zahl ist.

Kürzer schreiben wir bei solchen Fallunterscheidungen auch: $|x| = \begin{cases} x & \text{, falls } x \geq 0 \\ -x & \text{, falls } x < 0 \end{cases}$

Rechenregel für Beträge?

Für jede Zahl $x \in \mathbb{R}$ gilt: $(x-5)+5 = x$

Gibt es eine Zahl $x \in \mathbb{R}$, für die $|x-5|+5 = x$ *nicht* gilt?

Ja, zum Beispiel $x = 2$, denn: $|2-5|+5 = |-3|+5 = 8 \neq 2$

Betragsgleichungen lösen

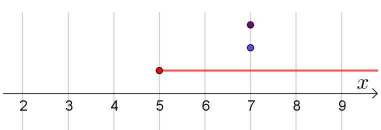
Kommt in einer Gleichung oder Ungleichung ein Betrag vor, führen wir eine Fallunterscheidung durch. Um die Gleichung $|x-5| = 2$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$ zu lösen, unterscheiden wir 2 Fälle:

- **Fall 1:** Wenn $x-5 \geq 0$, also $x \geq 5$ gilt, dann folgt: $|x-5| = x-5$
- **Fall 2:** Wenn $x-5 < 0$, also $x < 5$ gilt, dann folgt: $|x-5| = -(x-5)$

Fall 1: Wir untersuchen nur Zahlen $x \geq 5$.

$$\begin{aligned} x-5 &= 2 \quad | +5 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Die Zahl $x = 7$ ist unter den Zahlen $x \geq 5$.

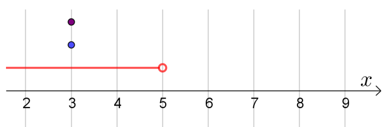


Also ist $x = 7$ eine Lösung.

Fall 2: Wir untersuchen nur Zahlen $x < 5$.

$$\begin{aligned} -(x-5) &= 2 \\ -x+5 &= 2 \quad | +x-2 \\ 3 &= x \end{aligned}$$

Die Zahl $x = 3$ ist unter den Zahlen $x < 5$.



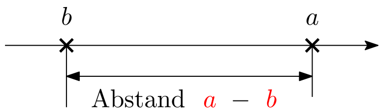
Also ist $x = 3$ eine Lösung.

Für die Lösungsmenge L dieser Gleichung gilt also: $L = \{3; 7\}$

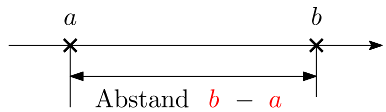
Abstandsberechnung

Erkläre anhand der beiden Bilder, warum $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$ der **Abstand von $\boldsymbol{a}$ zu $\boldsymbol{b}$** auf der Zahlengerade ist.

Fall 1: $a \geq b \implies |a - b| = a - b$



Fall 2: $a < b \implies |a - b| = -(a - b) = b - a$



Welche Lösungen hat also die Gleichung $|x - 5| = 2$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$?

Die Lösungen sind jene reellen Zahlen, deren Abstand zur Zahl 5 auf der Zahlengerade genau 2 ist.
Diese Eigenschaft haben nur die Zahlen 3 und 7.

Fall ohne Lösung

Wir lösen die Gleichung $|4 - 2 \cdot x| = 20 - 3 \cdot |x + 3|$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

Für welche Zahlen x gilt $4 - 2 \cdot x \geq 0$?

$$4 - 2 \cdot x \geq 0 \iff 4 \geq 2 \cdot x \iff 2 \geq x$$

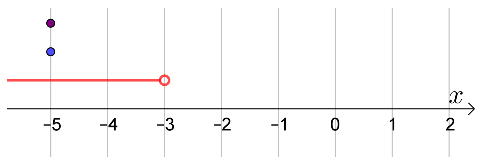
Für welche Zahlen x gilt $x + 3 \geq 0$?

$$x + 3 \geq 0 \iff x \geq -3$$

Um alle Lösungen zu ermitteln, teilen wir $\mathbb{R}$ in die 3 Intervalle $]-\infty; -3[$, $[-3; 2]$ und $]2; \infty[$ auf:

Fall 1: $x < -3 \implies |4 - 2 \cdot x| = 4 - 2 \cdot x$ bzw. $|x + 3| = -(x + 3)$

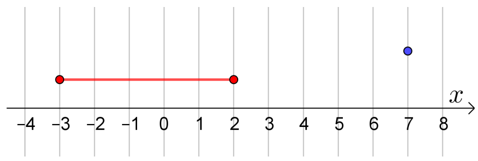
$$\begin{aligned} 4 - 2 \cdot x &= 20 + 3 \cdot (x + 3) \\ 4 - 2 \cdot x &= 20 + 3 \cdot x + 9 \\ -25 &= 5 \cdot x \\ x &= -5 \end{aligned}$$



Die Zahl $x = -5$ befindet sich unter den Zahlen $x < -3$. Also ist $x = -5$ eine Lösung.

Fall 2: $-3 \leq x \leq 2 \implies |4 - 2 \cdot x| = 4 - 2 \cdot x$ bzw. $|x + 3| = x + 3$

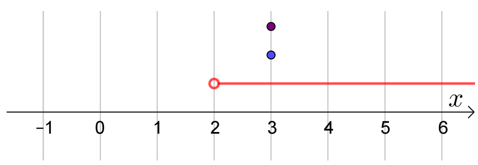
$$\begin{aligned} 4 - 2 \cdot x &= 20 - 3 \cdot (x + 3) \\ 4 - 2 \cdot x &= 20 - 3 \cdot x - 9 \\ x &= 7 \end{aligned}$$



Die Zahl $x = 7$ befindet sich *nicht* unter den Zahlen $-3 \leq x \leq 2$. In diesem Fall gibt es *keine* Lösung.

Fall 3: $x > 2 \implies |4 - 2 \cdot x| = -(4 - 2 \cdot x)$ bzw. $|x + 3| = x + 3$

$$\begin{aligned} -(4 - 2 \cdot x) &= 20 - 3 \cdot (x + 3) \\ -4 + 2 \cdot x &= 20 - 3 \cdot x - 9 \\ 5 \cdot x &= 15 \\ x &= 3 \end{aligned}$$



Die Zahl $x = 3$ befindet sich unter den Zahlen $x > 2$. Also ist $x = 3$ eine Lösung.
Für die Lösungsmenge L dieser Gleichung gilt also: $L = \{-5; 3\}$

Betragsungleichungen lösen

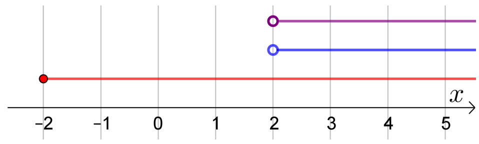
Wir lösen die Ungleichung $|x+2| > 4$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

- **Fall 1:** Wenn $x+2 \geq 0$, also $x \geq -2$ gilt, dann folgt: $|x+2| = x+2$
- **Fall 2:** Wenn $x+2 < 0$, also $x < -2$ gilt, dann folgt: $|x+2| = -(x+2)$

Fall 1: Wir untersuchen nur Zahlen $x \geq -2$.

$$\begin{aligned} x+2 &> 4 \quad | -2 \\ x &> 2 \end{aligned}$$

Unter den Zahlen $x \geq -2$ sind alle Zahlen $x > 2$ Lösungen.

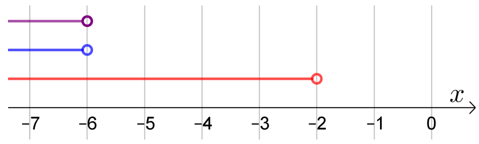


Also sind alle Zahlen $x > 2$ Lösungen.

Fall 2: Wir untersuchen nur Zahlen $x < -2$.

$$\begin{aligned} -(x+2) &> 4 \\ -x-2 &> 4 \quad | +x-4 \\ -6 &> x \end{aligned}$$

Unter den Zahlen $x < -2$ sind alle Zahlen $x < -6$ Lösungen.



Also sind alle Zahlen $x < -6$ Lösungen.

Für die Lösungsmenge L dieser Ungleichung gilt also: $L = \,]-\infty; -6[\; \cup \;]2; \infty[$

Deute $|x+2| = |x-(-2)|$ als Abstandsberechnung. Kannst du damit diese Ungleichung auch im Kopf lösen?

Fall ohne Lösung

Wir lösen die Ungleichung $|x-2| + |2 \cdot x + 3| \leq 5$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

- Es gilt $x-2 \geq 0$ genau dann, wenn $x \geq 2$.
- Es gilt $2 \cdot x + 3 \geq 0$ genau dann, wenn $x \geq -\frac{3}{2}$.

Um alle Lösungen zu ermitteln, teilen wir $\mathbb{R}$ in die 3 Intervalle $]-\infty; -\frac{3}{2}[$, $[-\frac{3}{2}; 2[$ und $[2; \infty[$ auf:

Fall 1: $x < -\frac{3}{2}$

$$-(x-2) - (2 \cdot x + 3) \leq 5 \iff -x + 2 - 2 \cdot x - 3 \leq 5 \iff -3 \cdot x \leq 6 \iff x \geq -2$$

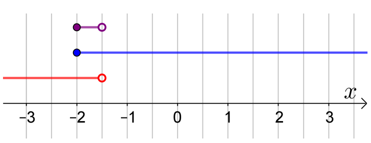
Fall 2: $-\frac{3}{2} \leq x < 2$

$$-(x-2) + (2 \cdot x + 3) \leq 5 \iff -x + 2 + 2 \cdot x + 3 \leq 5 \iff x \leq 0$$

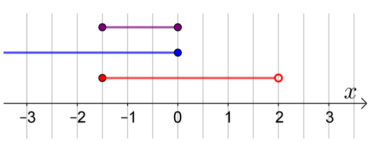
Fall 3: $x \geq 2$

$$(x-2) + (2 \cdot x + 3) \leq 5 \iff 3 \cdot x + 1 \leq 5 \iff x \leq \frac{4}{3}$$

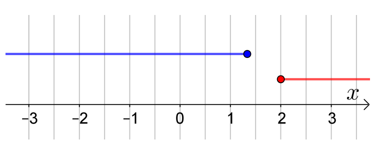
Ermittle für jeden der 3 Fälle die Lösungsmenge (L_1, L_2 bzw. L_3):



$\implies L_1 = [-2; -\frac{3}{2}[$



$\implies L_2 = [-\frac{3}{2}; 0]$



$\implies L_3 = \{\} = \emptyset$

Für die Lösungsmenge L dieser Ungleichung gilt also: $L = [-2; 0]$

3 Fälle

Löse die Ungleichung $|2 - 3 \cdot x| + |x + 1| \leq 9$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

- Es gilt $2 - 3 \cdot x \geq 0$ genau dann, wenn $x \leq \frac{2}{3}$.
- Es gilt $x + 1 \geq 0$ genau dann, wenn $x \geq -1$.

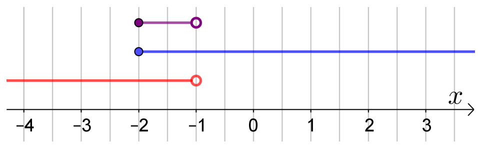
Um alle Lösungen zu ermitteln, teilen wir $\mathbb{R}$ in die 3 Intervalle $]-\infty; -1[$, $[-1; \frac{2}{3}]$ und $]\frac{2}{3}; \infty[$ auf:

Fall 1: $x < -1$

$$(2 - 3 \cdot x) - (x + 1) \leq 9 \iff 2 - 3 \cdot x - x - 1 \leq 9 \iff -4 \cdot x \leq 8 \iff x \geq -2$$

In diesem Fall gilt für die Lösungsmenge also:

$$L_1 = [-2; 1[$$

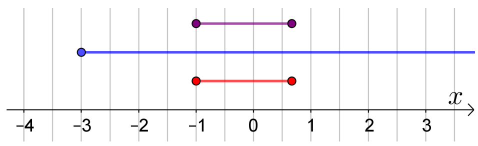


Fall 2: $-1 \leq x \leq \frac{2}{3}$

$$(2 - 3 \cdot x) + (x + 1) \leq 9 \iff -2 \cdot x + 3 \leq 9 \iff -2 \cdot x \leq 6 \iff x \geq -3$$

In diesem Fall gilt für die Lösungsmenge also:

$$L_2 = [-1; \tfrac{2}{3}]$$

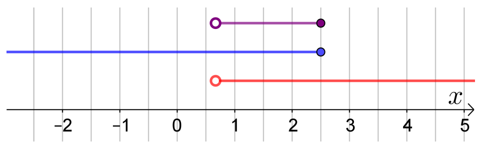


Fall 3: $x > \frac{2}{3}$

$$-(2 - 3 \cdot x) + (x + 1) \leq 9 \iff -2 + 3 \cdot x + x + 1 \leq 9 \iff 4 \cdot x \leq 10 \iff x \leq \frac{5}{2}$$

In diesem Fall gilt für die Lösungsmenge also:

$$L_3 =]\tfrac{2}{3}; \tfrac{5}{2}]$$



Für die Lösungsmenge L der Ungleichung gilt also: $L = [-2; \frac{5}{2}]$