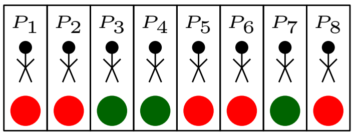
Auswahlproblem

Aus 8 Personen soll eine Gruppe von 3 Personen ausgewählt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es? Auf dem Arbeitsblatt – Kombinatorik haben wir dafür zwei Lösungswege entwickelt:

1) Sarah stellt die 8 Personen in eine Reihe und verteilt 3 grüne Kugeln und 5 rote Kugeln. Jedes Farbmuster entspricht genau einer Auswahl von 3 Personen.



Für die Anzahl möglicher Gruppen gilt also: $\dfrac{8!}{3!\cdot 5!} = 56$

2) Lukas baut die Gruppe schrittweise auf:

Es gibt $8\cdot 7\cdot 6 = 336$ Möglichkeiten, um nacheinander 3 Personen auszuwählen.

Jede Gruppe – z.B. **A**rabella, **B**ernhard und **C**arina – wird dabei aber mehrfach gezählt, nämlich $3! = 6$ Mal.

1	2	3
A	B	C
A	C	B
B	A	C
B	C	A
C	A	B
C	B	A

Für die Anzahl möglicher Gruppen gilt also: $\dfrac{8\cdot 7\cdot 6}{3!} = 56$

Binomialkoeffizient

Aus n *unterscheidbaren* Objekten soll eine *Menge* von k Objekten ausgewählt werden.
Die Reihenfolge der Auswahl ist dabei *nicht* wichtig. Bei Mengen ist die Reihenfolge der Elemente *nicht* wichtig.

Dann gibt der **Binomialkoeffizient** $\boldsymbol{\binom{n}{k}}$ die Anzahl verschiedener Auswahlmöglichkeiten an:

$$\boldsymbol{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{\overbrace{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}^{k\ \text{Faktoren}}}{k!}}$$

Sprechweise: „n *über* k“

Symmetrie des Binomialkoeffizienten

Sarah soll aus 8 Personen eine Gruppe von 3 Personen auswählen.
Leon soll aus 8 Personen eine Gruppe von 5 Personen auswählen.
Begründe, warum beide gleich viele Möglichkeiten haben.

Kombinatorische Begründung:
Wenn Sarah 3 Personen für die Gruppe auswählt, dann wählt sie gleichzeitig 5 Personen aus, die *nicht* in die Gruppe kommen. Jeder Auswahl von Sarah entspricht also genau eine Auswahl von Leon.

Rechnerische Begründung:

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\cdot 5!} = \frac{8!}{5!\cdot 3!} = \binom{8}{5}$$

Es gilt also $\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$ und allgemein $\boldsymbol{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$ für alle natürliche Zahlen mit $0 \le k \le n$.

Die Binomialkoeffizienten haben viele weitere Eigenschaften, die man sowohl kombinatorisch als auch rechnerisch begründen kann.

Binomialkoeffizienten

Berechne ohne Taschenrechner.

a) $\binom{10}{1} = \frac{10}{1!} = 10$

b) $\binom{10}{2} = \frac{10\cdot 9}{2!} = 45$

c) $\binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3!} = 120$

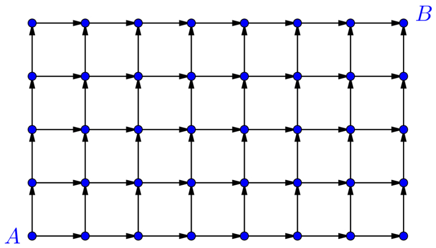
d) $\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = 120$

e) $\binom{10}{10} = \frac{10!}{10!} = 1$

f) $\binom{10}{0} = \binom{10}{10} = 1$

Richtungswahl

Nina steht im Punkt A und möchte entlang der Pfeile zum Punkt B kommen.



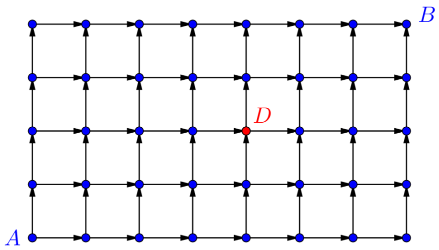
Wie viele mögliche Wege von A nach B hat Nina?

Jeder Weg von A nach B entspricht *genau einer* Abfolge von insgesamt 4 Schritten nach oben und 7 Schritten nach rechts in beliebiger Reihenfolge. Zum Beispiel: $(R, O, R, R, O, O, R, R, R, O, R)$

Nina hat also $\frac{11!}{4! \cdot 7!} = \binom{11}{4} = 330$ mögliche Wege von A nach B.

Multiplikationsregel

Der hungrige Josef steht im Punkt A und möchte entlang der Pfeile zum Punkt B kommen.



Wie viele mögliche Wege von A nach B hat Josef, wenn die Dönerbude im Punkt D am Weg liegen muss?

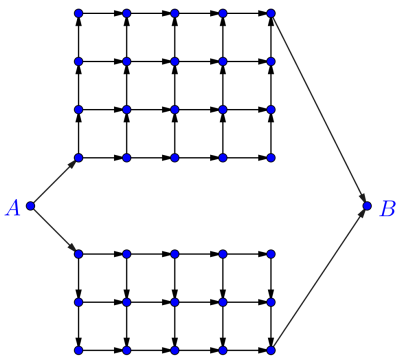
Jeder mögliche Weg für Josef ist eine Abfolge von einem Weg $A \to D$ und (unabhängig von der Wahl) einem Weg $D \to B$.

1) $A \to D: \binom{6}{2} = 15$ Wege

2) $D \to B: \binom{5}{2} = 10$ Wege

Josef hat also $15 \cdot 10 = 150$ mögliche Wege von A nach B, bei denen der Punkt D am Weg liegt.

Additionsregel



Kathi steht im Punkt A und möchte entlang der Pfeile zum Punkt B kommen. Wie viele mögliche Wege von A nach B hat Kathi?

Kathi kann im ersten Schritt entweder nach oben oder nach unten gehen. Wir führen eine Fallunterscheidung durch:

1) Wenn Kathi nach oben geht, hat sie $\binom{7}{3} = 35$ Wege nach B.

2) Wenn Kathi nach unten geht, hat sie $\binom{6}{2} = 15$ Wege nach B.

Kathi hat also insgesamt $35 + 15 = 50$ mögliche Wege von A nach B.

Ins Blaue raten

Bei einer Multiple-Choice-Frage „2 aus 5" gibt es 5 Antworten, von denen genau 2 richtig sind. Man muss 2 dieser 5 Antworten ankreuzen.

1) Wie viele Möglichkeiten gibt es, um 2 aus 5 Antworten anzukreuzen?

2) Wie viele Möglichkeiten gibt es, um 2 falsche Antworten anzukreuzen?

3) Wie viele Möglichkeiten gibt es, um mindestens eine richtige Antwort anzukreuzen?

1) $\binom{5}{2} = 10$ **2)** $\binom{3}{2} = 3$ **3)** $10 - 3 = 7$

Für jede der 10 Möglichkeiten aus **1)** gilt:

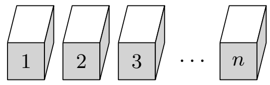
Entweder keine Antwort ist richtig oder mindestens eine Antwort ist richtig, also entweder **2)** oder **3)**.

Die Wahrscheinlichkeit, dass man durch zufälliges Ankreuzen mindestens eine richtige Antwort ankreuzt, ist deshalb $\frac{7}{10} = 70\,\%$.

Mehr zur Berechnung solcher Wahrscheinlichkeiten findest du auf dem Arbeitsblatt – Laplace-Experimente.

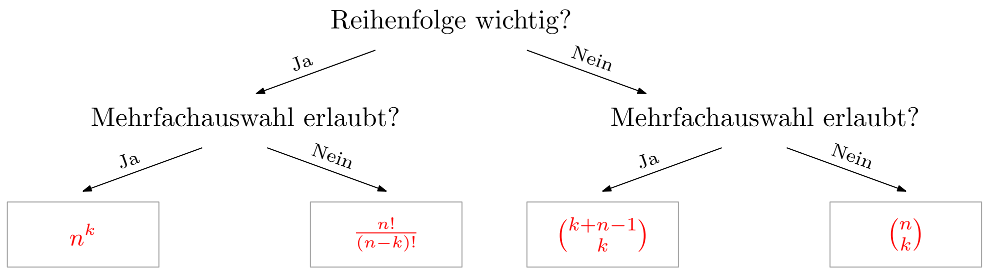
Auswahlprobleme

Aus n *unterscheidbaren* Boxen sollen k Boxen ausgewählt werden.
Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?
Die Lösung hängt von den Antworten auf die beiden folgenden Fragen ab:



1) Kommt es auf die Reihenfolge an, in der die Boxen ausgewählt werden *oder* ist die Reihenfolge *nicht* wichtig?

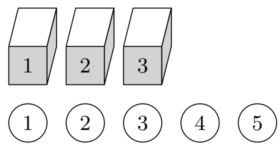
2) Darf jede Box höchstens einmal gewählt werden *oder* darf jede Box beliebig oft gewählt werden?



Es folgt jeweils eine zugehörige Aufgabe. Trage dann die Abzählformel in die Kästchen oben ein.

Variationen mit Wiederholung

1) Vor dir stehen $n = 3$ Boxen, die von 1 bis 3 durchnummeriert sind. Wie viele Möglichkeiten gibt es, um $k = 5$ unterscheidbare Bälle in die Boxen zu legen, wenn in jede Box beliebig viele Bälle passen?



Da die Bälle unterscheidbar sind, ist die Reihenfolge der Boxen-Auswahl wichtig.

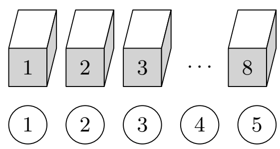
Da in jede Box beliebig viele Bälle passen, ist die Mehrfachauswahl von Boxen erlaubt.

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$$

2) Trage mithilfe von n und k die Abzählformel in das Kästchen im Entscheidungsbaum oben ein.

Variationen ohne Wiederholung

1) Vor dir stehen $n = 8$ Boxen, die von 1 bis 8 durchnummeriert sind. Wie viele Möglichkeiten gibt es, um $k = 5$ unterscheidbare Bälle in die Boxen zu legen, wenn in jede Box höchstens ein Ball passt?



Da die Bälle unterscheidbar sind, ist die Reihenfolge der Boxen-Auswahl wichtig.

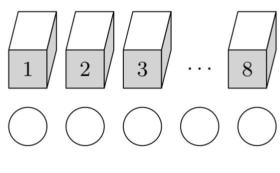
Da in jede Box höchstens ein Ball passt, ist *keine* Mehrfachauswahl von Boxen erlaubt.

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{8!}{3!} = 6720$$

2) Trage mithilfe von n und k die Abzählformel in das Kästchen im Entscheidungsbaum oben ein.

Kombinationen ohne Wiederholung

1) Vor dir stehen $n = 8$ Boxen, die von 1 bis 8 durchnummeriert sind. Wie viele Möglichkeiten gibt es, um $k = 5$ *nicht* unterscheidbare Bälle in die Boxen zu legen, wenn in jede Box höchstens ein Ball passt?



Da die Bälle *nicht* unterscheidbar sind, ist die Reihenfolge der Boxen-Auswahl *nicht* wichtig.

Da in jede Box höchstens ein Ball passt, ist *keine* Mehrfachauswahl von Boxen erlaubt.

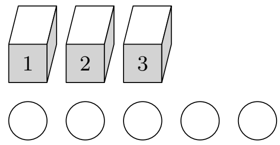
$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$$

(Färbe 5 Boxen grün und 3 Boxen rot.)

2) Trage mithilfe von n und k die Abzählformel in das Kästchen im Entscheidungsbaum oben ein.

Kombinationen mit Wiederholung

Vor dir stehen $n = 3$ Boxen, die von 1 bis 3 durchnummeriert sind.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, um $k = 5$ *nicht* unterscheidbare Bälle in die Boxen zu legen, wenn in jede Box beliebig viele Bälle passen?



Da die Bälle *nicht* unterscheidbar sind, ist die Reihenfolge der Boxen-Auswahl *nicht* wichtig.

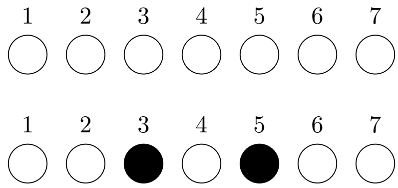
Da in jede Box beliebig viele Bälle passen, ist die Mehrfachauswahl von Boxen erlaubt.

Mögliche Aufteilungen sind zum Beispiel: $(3,0,2)$, $(3,2,0)$, $(1,1,3)$, $(5,0,0)$, $(0,5,0)$, $(2,1,2)$, ...
Wie viele Aufteilungen sind möglich? Dazu lösen wir zuerst ein (scheinbar) anderes Abzählproblem:

Wir fügen den $k = 5$ Bällen noch $n - 1 = 2$ gleiche Bälle hinzu.
Danach legen wir diese $k + n - 1 = 7$ Bälle in eine Reihe.

Aus dieser Reihe wählen wir eine Menge von $k = 5$ Positionen aus.
Die Bälle an diesen Positionen legen wir schließlich in die Boxen.

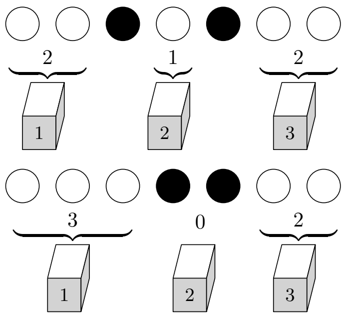
Die anderen $n - 1 = 2$ Bälle färben wir schwarz.
Im Bild rechts sind das die Bälle auf den Positionen 3 und 5.



Für diese Auswahl von $n - 1 = 2$ bzw. $k = 5$ Positionen aus den $k + n - 1 = 7$ Positionen gibt es

$$\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k} = \binom{7}{2} = 21$$

Möglichkeiten. Tatsächlich haben wir damit auch das ursprüngliche Abzählproblem *schlau* gelöst:
Die $n - 1 = 2$ schwarzen Bälle betrachten wir nämlich als „Trennzeichen“ zwischen den $n = 3$ Boxen.



Färben wir zum Beispiel die Bälle auf den Positionen 3 und 5 schwarz, dann entspricht das der Aufteilung $(2,1,2)$ auf die 3 Boxen.

Alle weißen Bälle links vom ersten schwarzen Ball, kommen in Box 1.

Alle weißen Bälle zwischen dem ersten und dem zweiten schwarzen Ball, kommen in Box 2.

Alle weißen Bälle rechts vom zweiten schwarzen Ball, kommen in Box 3.

Wollen wir zum Beispiel die Aufteilung $(3,0,2)$ auf die 3 Boxen, dann färben wir die Bälle auf den Positionen 4 und 5 schwarz.

Auswahlprobleme

Du hast 3 Gummibärchen in 3 verschiedenen Farben. Wofür gibt es mehr Möglichkeiten?

1) Die 3 Gummibärchen auf 8 Personen verteilen.
Jede Person darf auch mehrere Gummibärchen erhalten.

oder

2) Die 3 Gummibärchen auf 9 Personen verteilen.
Jede Person erhält höchstens ein Gummibärchen.

Personen $\leftrightarrow$ unterscheidbare Boxen

Gummibärchen $\leftrightarrow$ unterscheidbare Bälle

1) $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ Möglichkeiten

2) $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ Möglichkeiten

Du hast 3 *nicht* unterscheidbare Gummibärchen. Wofür gibt es mehr Möglichkeiten?

1) Die 3 Gummibärchen auf 10 Personen verteilen.
Jede Person erhält höchstens ein Gummibärchen.

oder

2) Die 3 Gummibärchen auf 8 Personen verteilen.
Jede Person darf auch mehrere Gummibärchen erhalten.

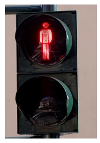
Personen $\leftrightarrow$ unterscheidbare Boxen

Gummibärchen $\leftrightarrow$ nicht unterscheidbare Bälle

1) $\binom{10}{3} = 120$ Möglichkeiten

2) $\binom{3+7}{3} = 120$ Möglichkeiten

Rot oder grün?



Auf Sebastians Schulweg sind 9 Ampeln.
An einem Tag merkt sich Sebastian bei jeder Ampel am Schulweg, ob sie rot oder grün war.

1) Wie viele Abfolgen (rot/grün) sind bei 9 Ampeln möglich?

2) Wie viele Abfolgen mit genau 3 roten Ampeln sind möglich?

3) Wie viele Abfolgen mit mindestens 2 roten Ampeln sind möglich?

1) $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^9 = 512$

Notiere bei einer Ampel nach der anderen, ob sie rot oder grün ist. Zum Beispiel: $(R, R, G, R, G, G, R, G, R)$

2) $\dfrac{9!}{3! \cdot 6!} = \dbinom{9}{3} = 84$

Anzahl Anordnungen von $(R, R, R, G, G, G, G, G, G)$

3) $2^9 - 1 - 9 = 502$

Bei jeder der 512 Abfolgen sind 0, 1, 2, ..., 8 oder 9 Ampeln rot. Für 0 rote Ampeln gibt es 1 Abfolge.
Für genau 1 rote Ampel gibt es 9 Abfolgen. Bei allen anderen Abfolgen sind mindestens 2 Ampeln rot.

Färbungen

Zum Einfärben von 8 *nicht* unterscheidbaren Ostereiern hast du 4 verschiedene Farben.
Du sollst jedes Osterei mit genau einer Farbe einfärben, wobei verschiedene Ostereier die gleiche Farbe haben dürfen. Wie viele verschiedene Einfärbungen sind insgesamt möglich?

$$\binom{8+3}{8} = \binom{11}{8} = 165 \text{ Möglichkeiten}$$

Es gibt $n = 4$ verschiedene Farbtöpfe (Boxen). Die $k = 8$ *nicht* unterscheidbaren Ostereier (Bälle) sollen beliebig auf diese Farbtöpfe verteilt werden. Da die Ostereier *nicht* unterscheidbar sind, ist die Reihenfolge der Farbtopf-Auswahl *nicht* wichtig. Die Mehrfachauswahl von Farbtöpfen ist erlaubt. Wir fügen den 8 Ostereiern also 3 Ostereier als „Trennzeichen“ zwischen den Farbtöpfen hinzu.

Lotto-Dreier

Beim Glücksspiel Lotto „6 aus 45“ gibt es 45 Kugeln, die mit den Zahlen von 1 bis 45 nummeriert sind.
Mit einem Lotto-Tipp entscheidet man sich für 6 dieser 45 Zahlen. Zum Beispiel: $\{3, 6, 19, 23, 26, 42\}$

a) Wie viele verschiedene Lotto-Tipps gibt es? Die Reihenfolge, in der die 6 Zahlen getippt werden, ist egal.

$$\binom{45}{6} = 8\,145\,060$$

b) Davids Lotto-Tipp ist $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Bei einer Lotto-Ziehung werden 6 der 45 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen und sortiert.
Wie viele Lotto-Ziehungen gibt es, die *genau* 3 der 6 getippten Zahlen enthalten?
Zum Beispiel wäre die Ziehung $\{2, 3, 6, 25, 38, 42\}$ ein solcher „Lotto-Dreier“ für David.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 ⋯ 45

Jeder Lotto-Dreier setzt sich für David folgendermaßen zusammen:
Genau 3 gezogene Zahlen sind von seinem Lotto-Tipp $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Unabhängig davon sind die anderen 3 gezogenen Zahlen *nicht* von seinem Lotto-Tipp.

Für die Anzahl solcher Lotto-Ziehungen gilt also: $\dbinom{6}{3} \cdot \dbinom{39}{3} = 182\,780$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Lotto-Dreier ist deshalb $\frac{182\,780}{8\,145\,060} = 2{,}24\ldots\,\%$.
Diese Wahrscheinlichkeit können wir auch mithilfe von Baumdiagrammen berechnen.