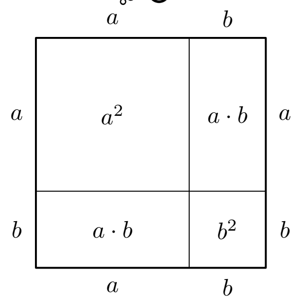
Binomische Formeln

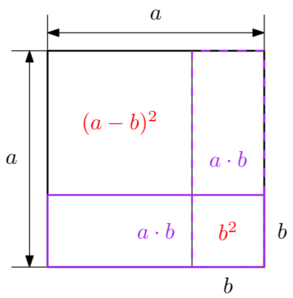
Rechts ist die **Binomische Formel**

$$\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}$$



veranschaulicht. Rechne die Formel nach, indem du ausmultiplizierst:

$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + a \cdot b + b \cdot a + b^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$



Rechne auch die **Binomische Formel**

$$\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2}$$

nach, und erkläre den Zusammenhang mit dem Bild links.

$(a-b)^2 = (a-b) \cdot (a-b) = a^2 - a \cdot b - b \cdot a + b^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$

Rechne auch die **Binomische Formel** $\boldsymbol{(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2}$ nach, indem du ausmultiplizierst:

$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - a \cdot b + b \cdot a - b^2 = a^2 - b^2$

Binomische Formeln

Multipliziere aus, und vereinfache so weit wie möglich.

a) $3 \cdot (x+y)^2 - 4 \cdot (x-y)^2 = 3 \cdot (x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2) - 4 \cdot (x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2) =$
$= 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x \cdot y + 3 \cdot y^2 - 4 \cdot x^2 + 8 \cdot x \cdot y - 4 \cdot y^2 = -x^2 + 14 \cdot x \cdot y - y^2$

b) $(x + 2 \cdot y)^2 + 3 \cdot (x+y) \cdot (x-y) = x^2 + 4 \cdot x \cdot y + 4 \cdot y^2 + 3 \cdot (x^2 - y^2)$
$= x^2 + 4 \cdot x \cdot y + 4 \cdot y^2 + 3 \cdot x^2 - 3 \cdot y^2 = 4 \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot y + y^2$

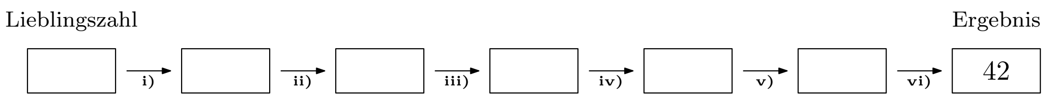
c) $(2 \cdot x)^2 - (2+x)^2 = 4 \cdot x^2 - (4 + 4 \cdot x + x^2) = 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 4$

d) $2 \cdot x \cdot (x^2+3)^2 = 2 \cdot x \cdot (x^4 + 6 \cdot x^2 + 9) = 2 \cdot x^5 + 12 \cdot x^3 + 18 \cdot x$

Zahlenrätsel

Suche dir deine Lieblingszahl ($\neq 0$) aus und führe die folgenden Rechenschritte durch.
Trage die Zwischenergebnisse in die Kästchen unten ein.

i) Subtrahiere 2 von deiner Lieblingszahl.
ii) Multipliziere das Ergebnis mit sich selbst.
iii) Subtrahiere 4 vom Ergebnis.
iv) Dividiere das Ergebnis durch deine Lieblingszahl.
v) Addiere 46 zum Ergebnis.
vi) Subtrahiere deine Lieblingszahl vom Ergebnis.



Meine Lieblingszahl bei solchen Rätseln ist x. Führe die gleichen Rechenschritte wie vorher mit x durch. Vereinfache nach jedem Schritt so weit wie möglich. Zeige, dass das Ergebnis hier immer 42 ist.

$x \xrightarrow{\text{i)}} x - 2 \xrightarrow{\text{ii)}} (x-2)^2 = x^2 - 4 \cdot x + 4 \xrightarrow{\text{iii)}} x^2 - 4 \cdot x \xrightarrow{\text{iv)}} \frac{x^2 - 4 \cdot x}{x} = x - 4 \xrightarrow{\text{v)}} x + 42 \xrightarrow{\text{vi)}} 42$

Faktorisieren

Vereinfache den Bruchterm mit den Binomischen Formeln so weit wie möglich.

a) $\dfrac{x^2-6\cdot x+9}{(x-3)\cdot(x+3)} = \dfrac{(x-3)^2}{(x-3)\cdot(x+3)} = \dfrac{x-3}{x+3}$

b) $\dfrac{x^2-2\cdot x}{x^2-4} = \dfrac{x\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x+2)} = \dfrac{x}{x+2}$

c) $\dfrac{(3+h)^2-9}{h} = \dfrac{9+6\cdot h+h^2-9}{h} = \dfrac{h\cdot(6+h)}{h} = 6+h$

Mustererkennung

In der Mathematik gibt es eine Vielzahl ungelöster Probleme, an denen täglich geforscht wird.

Wesentlich dabei ist das Erkennen von Zusammenhängen und Mustern, das Aufstellen von Vermutungen und das Beweisen dieser Vermutungen.

$2^2 = 3\cdot 1+1$
$5^2 = 6\cdot 4+1$
$8^2 = 9\cdot 7+1$
$11^2 = 12\cdot 10+1$
$14^2 = 15\cdot 13+1$
$17^2 = 18\cdot 16+1$
$20^2 = 21\cdot 19+1$
$23^2 = 24\cdot 22+1$

1) Kontrolliere, dass die Rechnungen rechts stimmen.

2) Setze das Muster rechts in den folgenden 3 Zeilen fort.

Der Term $3\cdot n$ legt die Zahlenfolge $(3; 6; 9; 12; 15; \ldots)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ eindeutig fest:

- Die 1. Zahl der Folge ist $3\cdot 1 = 3$.
- Die 2. Zahl der Folge ist $3\cdot 2 = 6$.
- Die 3. Zahl der Folge ist $3\cdot 3 = 9$.

$\vdots \qquad \vdots$

3) Stelle mithilfe von n eine Vermutung für den Zusammenhang rechts oben auf.

$$(3\cdot n-1)^2 = (3\cdot n)\cdot(3\cdot n-2)+1$$

4) Beweise deine Vermutung. Zeige also, dass auf beiden Seiten für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ das gleiche Ergebnis herauskommt.

Linke Seite: $(3\cdot n-1)^2 = 9\cdot n^2-6\cdot n+1$

Rechte Seite: $(3\cdot n)\cdot(3\cdot n-2)+1 = 9\cdot n^2-6\cdot n+1$ ✓

$(a+b)^3$

Multipliziere den Term $(a+b)^3$ aus, und vereinfache so weit wie möglich.

$$(a+b)^3 = (a+b)\cdot(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a^2+2\cdot a\cdot b+b^2) =$$
$$= a^3+2\cdot a^2\cdot b+a\cdot b^2+a^2\cdot b+2\cdot a\cdot b^2+b^3 = a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3$$

Den Term $(a+b)^6$ auf diese Weise auszumultiplizieren, wäre mühsam. Das Pascalsche Dreieck liefert eine Abkürzung.

Pascalsches Dreieck

Unten sind die ersten Zeilen des **Pascalschen Dreiecks** dargestellt. Erkennst du ein Muster? Welche Zahlen stehen vermutlich in den nächsten beiden Zeilen?

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \mathbf{1} & & & & & & \\
 & & & & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & & & & \\
 & & & & \mathbf{1} & & \mathbf{2} & & \mathbf{1} & & & & \\
 & & & \mathbf{1} & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \mathbf{1} & & & \\
 & & \mathbf{1} & & \mathbf{4} & & \mathbf{6} & & \mathbf{4} & & \mathbf{1} & & \\
 & \mathbf{1} & & \mathbf{5} & & \mathbf{10} & & \mathbf{10} & & \mathbf{5} & & \mathbf{1} & \\
\mathbf{1} & & \mathbf{6} & & \mathbf{15} & & \mathbf{20} & & \mathbf{15} & & \mathbf{6} & & \mathbf{1}
\end{array}
$$

Wir haben zuvor ausmultipliziert:

$$(a+b)^2 = \mathbf{1} \cdot a^2 + \mathbf{2} \cdot a^1 \cdot b^1 + \mathbf{1} \cdot b^2$$

$$(a+b)^3 = \mathbf{1} \cdot a^3 + \mathbf{3} \cdot a^2 \cdot b^1 + \mathbf{3} \cdot a^1 \cdot b^2 + \mathbf{1} \cdot b^3$$

Siehst du den Zusammenhang mit dem Pascalschen Dreieck oben? Setze das Muster fort:

$$(a+b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot b^1 + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a^1 \cdot b^3 + 1 \cdot b^4$$

$$(a+b)^5 = 1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4 \cdot b^1 + 10 \cdot a^3 \cdot b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot a^1 \cdot b^4 + 1 \cdot b^5$$

$$(a+b)^6 = 1 \cdot a^6 + 6 \cdot a^5 \cdot b^1 + 15 \cdot a^4 \cdot b^2 + 20 \cdot a^3 \cdot b^3 + 15 \cdot a^2 \cdot b^4 + 6 \cdot a^1 \cdot b^5 + 1 \cdot b^6$$

Pascalsches Dreieck

Multipliziere aus, und vereinfache so weit wie möglich.

a)
$$
\begin{aligned}
2 \cdot (x+2)^4 &= 2 \cdot (1 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot 2^1 + 6 \cdot x^2 \cdot 2^2 + 4 \cdot x^1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4) = \\
&= 2 \cdot x^4 + 16 \cdot x^3 + 48 \cdot x^2 + 64 \cdot x + 32
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
4 \cdot (x-2)^3 &= 4 \cdot (x + (-2))^3 = \\
&= 4 \cdot (1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot (-2)^1 + 3 \cdot x^1 \cdot (-2)^2 + 1 \cdot (-2)^3) = \\
&= 4 \cdot x^3 - 24 \cdot x^2 + 48 \cdot x - 32
\end{aligned}
$$

Pascalsches Dreieck

Für $(a+b)^2$ und $(a+b)^3$ haben wir schon nachgerechnet, dass diese Methode funktioniert. Wenn die Rechnung für eine Zeile stimmt, dann stimmt sie auch für die nächste Zeile:

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^4 = (a+b) \cdot (a+b)^3 = \\
&= (a+b) \cdot (1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b^1 + 3 \cdot a^1 \cdot b^2 + 1 \cdot b^3) = \\
&= 1 \cdot a^4 + 3 \cdot a^3 \cdot b^1 + 3 \cdot a^2 \cdot b^2 + 1 \cdot a^1 \cdot b^3 + \\
&\qquad + 1 \cdot a^3 \cdot b^1 + 3 \cdot a^2 \cdot b^2 + 3 \cdot a^1 \cdot b^3 + 1 \cdot b^4 = \\
&= 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot b^1 + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a^1 \cdot b^3 + 1 \cdot b^4
\end{aligned}
$$