

Der **Binomialkoeffizient**  $\binom{n}{k}$  kann folgendermaßen berechnet werden:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!} \quad \text{für alle } k, n \in \mathbb{N} \quad \text{mit } 0 \leq k \leq n.$$

Dabei ist  $n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$  und  $0! = 1$ .

Sprechweisen:  $\binom{n}{k} \leftrightarrow$  „ $n$  über  $k$ “

$n! \leftrightarrow$  „ $n$  Fakultät“ bzw. „ $n$  Faktorielle“

Wie viele Möglichkeiten gibt es, um aus  $n$  Personen eine Gruppe von  $k$  Personen auszuwählen?

Die Lösung ist der Binomialkoeffizient  $\binom{n}{k}$ . Eine Erklärung dafür findest du auf dem [Arbeitsblatt – Binomialkoeffizienten](#).

Das unten links dargestellte **Pascalsche Dreieck** ist durch folgende beide Regeln eindeutig festgelegt:

- 1) Jede Zahl am linken Rand und am rechten Rand ist 1.
- 2) Jede Zahl im Inneren ist die Summe der beiden benachbarten Zahlen in der Zeile darüber.

Die Zahlen im Pascalschen Dreieck sind genau die unten rechts dargestellten Binomialkoeffizienten:

Eine kombinatorische Erklärung dafür findest du auf dem [Arbeitsblatt – Pascalsches Dreieck und Binomialkoeffizienten](#).

			1																$\binom{0}{0}$					
			1		1														$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$				
			1		2		1												$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$			
			1		3		3		1										$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$		
			1		4		6		4		1								$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$	
			1		5		10		10		5		1						$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$

Wir können diese Gleichheit auch rechnerisch überprüfen:

- 1) Rechne nach, dass  $\binom{n}{0} = 1$  und  $\binom{n}{n} = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

- 2) Rechne nach, dass  $\binom{n}{k} = \binom{n - 1}{k - 1} + \binom{n - 1}{k}$  für alle  $0 < k < n$  gilt.

**Der Binomische Lehrsatz**

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k} \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

hilft beim Ausmultiplizieren von Binomen der Form  $(x + y)^n$ . Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} (x + y)^4 &= \binom{4}{0} \cdot x^0 \cdot y^4 + \binom{4}{1} \cdot x^1 \cdot y^3 + \binom{4}{2} \cdot x^2 \cdot y^2 + \binom{4}{3} \cdot x^3 \cdot y^1 + \binom{4}{4} \cdot x^4 \cdot y^0 \\ &= 1 \cdot y^4 + 4 \cdot x \cdot y^3 + 6 \cdot x^2 \cdot y^2 + 4 \cdot x^3 \cdot y + 1 \cdot x^4 \end{aligned}$$

Eine kombinatorische Erklärung dafür findest du auf dem [Arbeitsblatt – Pascalsches Dreieck und Binomialkoeffizienten](#).

Hier beweisen wir den Binomischen Lehrsatz mit [vollständiger Induktion](#) für  $n \geq 0$ :

Überprüfe den Binomischen Lehrsatz für  $n = 0$ :

Als Nächstes überprüfen wir den Induktionsschritt  $n \rightarrow n + 1$  für  $n \geq 0$ :

Wir dürfen also verwenden, dass  $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$  gilt.

Daraus müssen wir folgern, dass  $(x + y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k}$  gilt.

Dafür ziehen wir zunächst die Summanden  $k = 0$  und  $k = n + 1$  aus der Summe, um  $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$  verwenden zu können.

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k} = \\ &= y^{n+1} + x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] \cdot x^k \cdot y^{n+1-k} = \quad \text{Ausmultiplizieren, Summe aufteilen} \\ &= \underbrace{y^{n+1}}_{k=0} + \underbrace{x^{n+1}}_{k=n} + \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot x^{k+1} \cdot y^{n-k} \right] + \left[ \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k} \right] = \quad \sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \\ &= x \cdot \left[ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k} \right] + y \cdot \left[ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k} \right] = \\ &= x \cdot (x + y)^n + y \cdot (x + y)^n = (x + y) \cdot (x + y)^n = (x + y)^{n+1} \quad \checkmark \end{aligned}$$

**Zeilensumme im Pascalschen Dreieck** 

Berechne mit dem Binomischen Lehrsatz die  $n$ -te Zeilensumme im Pascalschen Dreieck:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = \boxed{\phantom{0}}$$

**Alternierende Zeilensumme im Pascalschen Dreieck** 

Berechne mit dem Binomischen Lehrsatz für  $n \geq 1$ :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (-1)^k = \boxed{\phantom{0}}$$