Rationale Zahlen

Alle Zahlen, die man als **Bruch** $\frac{a}{b}$ mit ganzen Zahlen a und $b \neq 0$ schreiben kann, heißen **rationale Zahlen** bzw. **Bruchzahlen**.

Jede Dezimalzahl mit endlich vielen Nachkommastellen ist rational. Zum Beispiel: $0{,}42 = \frac{42}{100}$

Jede periodische Dezimalzahl ist rational. Zum Beispiel: $0{,}\dot{3} = 0{,}333... = \frac{1}{3}$ bzw. $0{,}\overline{42} = 0{,}4242... = \frac{42}{99}$

Die Menge der rationalen Zahlen wird mit $\mathbb{Q}$ abgekürzt: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

Dabei verwenden wir die folgenden Bezeichnungen:

$$\frac{a}{b}\quad\begin{array}{l}\longleftarrow \textbf{Zähler}\\ \longleftarrow \textbf{Bruchstrich}\\ \longleftarrow \textbf{Nenner}\end{array}$$

Bruchstrich – Divisionszeichen

Der Bruchstrich steht so wie die Symbole $\div$, $:$ und $/$ für eine Division.

Es gilt also: $\frac{7}{2} = 7 \div 2 = 7 : 2 = 7/2 = 3{,}5$

Berechne: **a)** $2 + 8 : 4 - 6 = -2$ **b)** $(2 + 8) : (4 - 6) = -5$ **c)** $\dfrac{2+8}{4-6} = -5$

Versteckte Klammern

Bei jedem Bruch sind Zähler und Nenner jeweils in Klammern gesetzt.
Wir müssen diese Klammern nicht anschreiben, aber dürfen nicht darauf vergessen.

Zum Beispiel: $2 \cdot \dfrac{x+3}{5} = 4$

Falsche Umformung: $2 \cdot x + 3 = 20$
Richtige Umformung: $2 \cdot (x + 3) = 20$

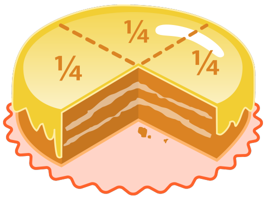
Brüche als relative Anteile

Liegt eine Bruchzahl zwischen 0 und 1, dann können wir sie als relativen Anteil interpretieren.

Zum Beispiel: $\dfrac{3}{4} = 3 : 4 = 0{,}75 = 75\,\%$

Die ganze Torte rechts wurde in 4 gleich große Stücke geteilt.

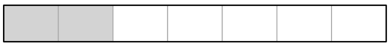
Es sind noch 3 Stücke übrig. Das sind $\frac{3}{4}$ bzw. $75\,\%$ der ganzen Torte.



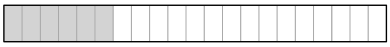
Verschiedene Brüche – Gleiche Bruchzahl

Hinter *verschiedenen* Brüchen kann die *gleiche* Bruchzahl stecken.

Markiere $\frac{2}{7}$ der Rechtecksfläche:



Markiere $\frac{6}{21}$ der Rechtecksfläche:



In beiden Bildern hast du den *gleichen* relativen Anteil der Rechtecksfläche markiert, nämlich:

$$2 : 7 = 6 : 21 = 0{,}2857... = 28{,}57...\,\%$$

Trage jeweils eine Zahl richtig in das Kästchen ein:

a) $\dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{12}$ **b)** $\dfrac{4}{5} = \dfrac{20}{25}$ **c)** $\dfrac{3}{5} = \dfrac{18}{30}$ **d)** $\dfrac{2}{3} = \dfrac{14}{21}$

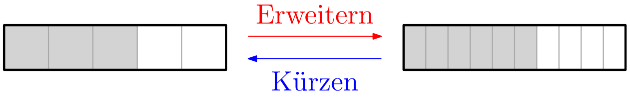
e) $\dfrac{4}{18} = \dfrac{2}{9}$ **f)** $\dfrac{15}{25} = \dfrac{3}{5}$ **g)** $\dfrac{12}{28} = \dfrac{3}{7}$ **h)** $\dfrac{35}{42} = \dfrac{5}{6}$

Erweitern und Kürzen von Brüchen

Wenn wir einen **Bruch erweitern**,
dann multiplizieren wir Zähler und Nenner
mit der gleichen Zahl ($\neq 0$).

Wenn wir einen **Bruch kürzen**,
dann dividieren wir Zähler und Nenner
durch die gleiche Zahl ($\neq 0$).

$$\frac{3}{5} = \frac{2\cdot 3}{2\cdot 5} = \frac{6}{10}$$



Die Bruchzahl verändert sich beim Erweitern und beim Kürzen *nicht*: $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0{,}6$

Wenn Zähler und Nenner jeweils ein Produkt sind, können wir also gleiche Faktoren kürzen:

$$\frac{\cancel{\triangle}\cdot\square\cdot\cancel{\varnothing}\cdot\lozenge}{\cancel{\varnothing}\cdot\triangledown\cdot\cancel{\triangle}\cdot\triangle} = \frac{\square\cdot\lozenge}{\triangledown\cdot\triangle}$$

Wir *dividieren* links den Zähler und den Nenner jeweils durch △ und durch ☺.

Brüche vollständig kürzen

Unten findest du zwei Methoden, um den Bruch $\frac{252}{1890}$ vollständig zu kürzen.

i) Berechne zuerst die Primfaktorzerlegung von 252 und von 1890.
Schreibe dann den Zähler und den Nenner als Produkt von Primzahlen und kürze vollständig.

252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

1890	2
945	3
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

$$\frac{252}{1890} = \frac{\cancel{2}\cdot 2\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{7}}{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot 3\cdot 5\cdot\cancel{7}} = \frac{2}{15}$$

ii) Kürze in jedem Schritt durch einen gemeinsamen Teiler.

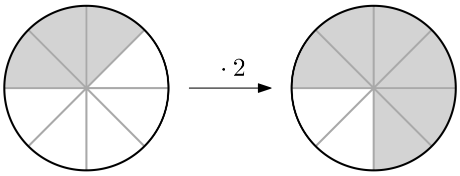
$$\frac{252}{1890} = \frac{126}{945} = \frac{42}{315} = \frac{14}{105} = \frac{2}{15}$$

Bruch · Zahl

Im Bild rechts wird der relative Anteil $\frac{3}{8}$ verdoppelt. Der neue relative Anteil ist $\frac{6}{8}$.

Als Rechnung: $\frac{3}{8}\cdot 2 = \frac{3\cdot 2}{8} = \frac{6}{8}$

Allgemein gilt: $\boldsymbol{\frac{a}{b}\cdot c = \frac{a\cdot c}{b}}$



Bruch · Zahl

Berechne das Ergebnis.

a) $\frac{1}{4}\cdot 3 = \frac{3}{4}$ **b)** $\frac{3}{7}\cdot 2 = \frac{6}{7}$ **c)** $\frac{2}{3}\cdot 5 = \frac{10}{3}$ **d)** $\frac{6}{5}\cdot 7 = \frac{42}{5}$

Für $\frac{42}{5} = 8 + \frac{2}{5}$ gibt es auch die Schreibweise $8\,\frac{2}{5}$.

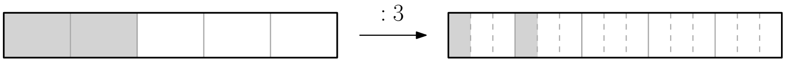
Wegen der Verwechslungsgefahr mit $8\cdot\frac{2}{5} = \frac{16}{5}$ (bzw. $a\frac{b}{c} = \frac{a\cdot b}{c} = \frac{ab}{c}$) verzichten wir auf diese Schreibweise.

Bruch : Zahl

Um den Bruch $\frac{2}{5}$ durch 3 zu dividieren, multiplizieren wir den Nenner mit 3.

Als Rechnung: $\frac{2}{5} : 3 = \frac{2}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$

Allgemein gilt: $\boldsymbol{\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}}$



Gerhard freut sich schon auf $\frac{2}{5}$ eines Apfelstrudels. Er möchte aber nicht alles auf einmal essen, sondern dieses Stück in 3 gleiche Teile teilen. Dazu kann er die $\frac{1}{5}$-Teile dritteln, also $\frac{1}{15}$-Teile des gesamten Apfelstrudels bilden und zwei dieser Teile verspeisen.

Bruch : Zahl

Berechne das Ergebnis.

a) $\frac{1}{4} : 3 = \frac{1}{12}$ **b)** $\frac{3}{7} : 2 = \frac{3}{14}$ **c)** $\frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{15}$ **d)** $\frac{6}{5} : 7 = \frac{6}{35}$

Bruch · Bruch

Rechts unten ist ein Quadrat mit Seitenlänge 1 m dargestellt.

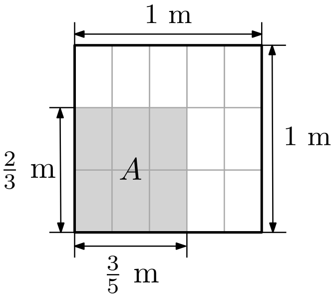
Wir berechnen den Flächeninhalt A der grau markierten Fläche auf zwei verschiedene Arten:

1) $A = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}\ \mathrm{m}^2$

2) $A = 6 \cdot \frac{1}{15}\ \mathrm{m}^2 = \frac{6}{15}\ \mathrm{m}^2 = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5}\ \mathrm{m}^2$

Allgemein gilt: $\boldsymbol{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}}$

„Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner“



Bruch · Bruch

Berechne das Ergebnis, und kürze so weit wie möglich.

a) $\frac{3}{2} \cdot \frac{14}{6} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 7}{\cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{3}} = \frac{7}{2}$ **b)** $\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{2} = \frac{\cancel{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot \cancel{2}} = \frac{2 \cdot 3}{1} = 6$

$\boldsymbol{x}$: Bruch

Statt durch den Bruch $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ zu dividieren, können wir auch mit seinem **Kehrwert** $\boldsymbol{\frac{b}{a}}$ multiplizieren.

Zum Beispiel: $5 : \frac{3}{2} = 5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$

Begründung: $12 : 4 = 3$, weil $3 \cdot 4 = 12$ ✓

$x : \frac{a}{b} = x \cdot \frac{b}{a}$, weil $\left(x \cdot \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{a}{b} = x \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = x \cdot \frac{b \cdot a}{a \cdot b} = x \cdot 1 = x$ ✓

Allgemein gilt: $\boldsymbol{x : \frac{a}{b} = x \cdot \frac{b}{a}}$

Beachte auch, dass $\frac{3}{2} : 5 = \frac{3}{10}$ der Kehrwert von $5 : \frac{3}{2} = \frac{10}{3}$ ist.

$\boldsymbol{x}$: Bruch

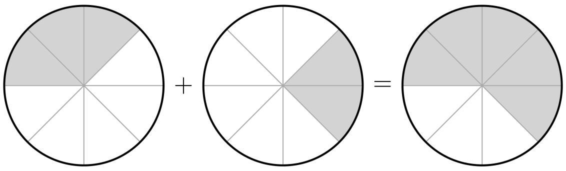
Berechne das Ergebnis, und kürze so weit wie möglich.

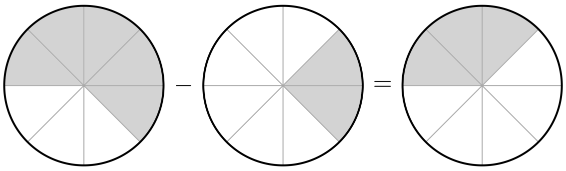
a) $35 : \frac{20}{3} = 35 \cdot \frac{3}{20} = \frac{\cancel{5} \cdot 7 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot \cancel{5}} = \frac{21}{4}$ **b)** $\frac{14}{15} : \frac{28}{3} = \frac{14}{15} \cdot \frac{3}{28} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot 5 \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{7}} = \frac{1}{10}$

Bruch ± Bruch

Wenn zwei Brüche den *gleichen Nenner* haben, dann können wir sie sofort addieren bzw. subtrahieren:

$$\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3+2}{8} = \frac{5}{8} \qquad \frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{5-2}{8} = \frac{3}{8}$$

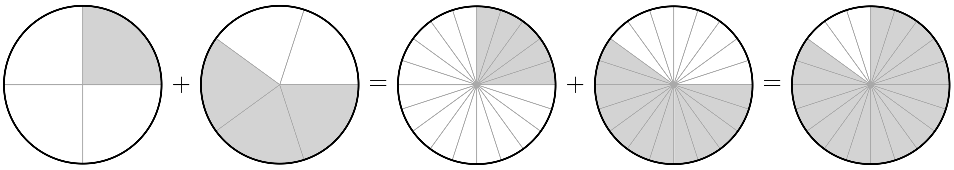




Allgemein gilt: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ Allgemein gilt: $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

Wenn sie *verschiedene Nenner* haben, dann erweitern wir sie zuerst auf einen gemeinsamen Nenner:

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{5} = \frac{5}{20} + \frac{12}{20} = \frac{5+12}{20} = \frac{17}{20}$$



Bruch ± Bruch

Berechne das Ergebnis, und kürze so weit wie möglich.

a) $\frac{5}{6} + \frac{4}{9} = \frac{15}{18} + \frac{8}{18} = \frac{23}{18}$ **b)** $3 - \frac{2}{7} = \frac{3}{1} - \frac{2}{7} = \frac{21}{7} - \frac{2}{7} = \frac{19}{7}$

Kleinster gemeinsamer Nenner

Bei der Addition $\frac{1}{30} + \frac{1}{42}$ könnten wir die Brüche auf den gemeinsamen Nenner $30 \cdot 42 = 1260$ erweitern.

Der *kleinste* gemeinsame Nenner ist $\operatorname{kgV}(30; 42) = \operatorname{kgV}(2 \cdot 3 \cdot 5; 2 \cdot 3 \cdot 7) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.

Erweitere auf den kleinsten gemeinsamen Nenner, damit Zähler und Nenner möglichst klein bleiben:

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{42} = \frac{7}{210} + \frac{5}{210} = \frac{12}{210} = \frac{6}{105} = \frac{2}{35}$$

Doppelbrüche

Zur Auflösung von Doppelbrüchen können wir den Hauptbruchstrich durch eine Division ersetzen:

i) $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$ ii) $\frac{a}{\frac{b}{c}} = a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b}$ iii) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

„Außen mal außen durch innen mal innen“

Doppelbrüche

Berechne das Ergebnis, und kürze so weit wie möglich.

a) $\frac{\frac{4}{7}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{7}$ **b)** $\frac{\frac{7}{2}}{3} = \frac{7}{2} : 3 = \frac{7}{6}$ **c)** $\frac{5}{\frac{2}{3}} = 5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$