



Alle Zahlen, die man als **Bruch**  $\frac{a}{b}$  mit **ganzen Zahlen**  $a$  und  $b \neq 0$  schreiben kann, heißen **rationale Zahlen** bzw. **Bruchzahlen**.

Jede Dezimalzahl mit endlich vielen Nachkommastellen ist rational. Zum Beispiel:  $0,42 = \frac{42}{100}$

Jede periodische Dezimalzahl ist rational. Zum Beispiel:  $0,\dot{3} = 0,333\dots = \frac{1}{3}$  bzw.  $0,\overline{42} = 0,4242\dots = \frac{42}{99}$

Die Menge der rationalen Zahlen wird mit  $\mathbb{Q}$  abgekürzt:  $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

Dabei verwenden wir die folgenden Bezeichnungen:  $\frac{a}{b}$  ← **Zähler**  
 ← **Bruchstrich**  
 ← **Nenner**

Bruchstrich – Divisionszeichen



Der Bruchstrich steht so wie die Symbole  $\div$ ,  $:$  und  $/$  für eine Division.

Es gilt also:  $\frac{7}{2} = 7 \div 2 = 7 : 2 = 7/2 = 3,5$

Berechne: a)  $2 + 8 : 4 - 6 = -2$     b)  $(2 + 8) : (4 - 6) = -5$     c)  $\frac{2 + 8}{4 - 6} = -5$

Versteckte Klammern



Bei jedem Bruch sind Zähler und Nenner jeweils in Klammern gesetzt. Wir müssen diese Klammern nicht anschreiben, aber dürfen nicht darauf vergessen.

Zum Beispiel:  $2 \cdot \frac{x + 3}{5} = 4$     Falsche Umformung:  $2 \cdot x + 3 = 20$   
 Richtige Umformung:  $2 \cdot (x + 3) = 20$

Brüche als relative Anteile

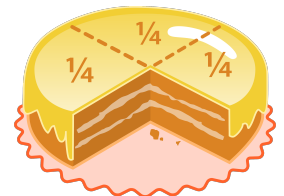


Liegt eine Bruchzahl zwischen 0 und 1, dann können wir sie als **relativen Anteil** interpretieren.

Zum Beispiel:  $\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0,75 = 75\%$

Die ganze Torte rechts wurde in 4 gleich große Stücke geteilt.

Es sind noch 3 Stücke übrig. Das sind  $\frac{3}{4}$  bzw. 75% der ganzen Torte.

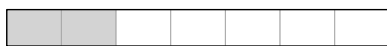


Verschiedene Brüche – Gleiche Bruchzahl

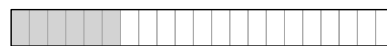


Hinter *verschiedenen* Brüchen kann die *gleiche* Bruchzahl stecken.

Markiere  $\frac{2}{7}$  der Rechtecksfläche:



Markiere  $\frac{6}{21}$  der Rechtecksfläche:



In beiden Bildern hast du den *gleichen* relativen Anteil der Rechtecksfläche markiert, nämlich:

$$2 : 7 = 6 : 21 = 0,2857\dots = 28,57\dots\%$$

Trage jeweils eine Zahl richtig in das Kästchen ein:

a)  $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$     b)  $\frac{4}{5} = \frac{20}{25}$     c)  $\frac{3}{5} = \frac{18}{30}$     d)  $\frac{2}{3} = \frac{14}{21}$

e)  $\frac{4}{18} = \frac{2}{9}$     f)  $\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$     g)  $\frac{12}{28} = \frac{3}{7}$     h)  $\frac{35}{42} = \frac{5}{6}$

Erweitern und Kürzen von Brüchen



Wenn wir einen **Bruch erweitern**, dann multiplizieren wir Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl ( $\neq 0$ ).

$$\frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{6}{10}$$

Wenn wir einen **Bruch kürzen**, dann dividieren wir Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl ( $\neq 0$ ).



Die Bruchzahl verändert sich beim Erweitern und beim Kürzen *nicht*:  $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0,6$

Wenn Zähler und Nenner jeweils ein Produkt sind, können wir also gleiche Faktoren kürzen:

$$\frac{\cancel{\Delta} \cdot \square \cdot \cancel{\ominus} \cdot \diamond}{\cancel{\ominus} \cdot \nabla \cdot \cancel{\Delta} \cdot \Delta} = \frac{\square \cdot \diamond}{\nabla \cdot \Delta}$$

Wir *dividieren* links den Zähler und den Nenner jeweils durch  $\Delta$  und durch  $\ominus$ .

Brüche vollständig kürzen



Unten findest du zwei Methoden, um den Bruch  $\frac{252}{1890}$  vollständig zu kürzen.

- i) Berechne zuerst die **Primfaktorzerlegung** von 252 und von 1890. Schreibe dann den Zähler und den Nenner als Produkt von Primzahlen und kürze vollständig.

252		2
126		2
63		3
21		3
7		7
1		1

1890		2
945		3
315		3
105		3
35		5
7		7
1		1

$$\frac{252}{1890} = \frac{\cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 7}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{2}{15}$$

- ii) Kürze in jedem Schritt durch einen gemeinsamen **Teiler**.

$$\frac{252}{1890} = \frac{126}{945} = \frac{42}{315} = \frac{14}{105} = \frac{2}{15}$$

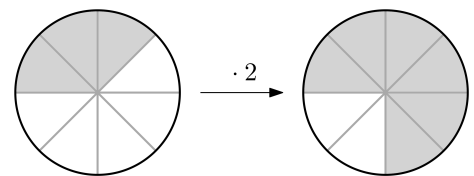
Bruch · Zahl



Im Bild rechts wird der relative Anteil  $\frac{3}{8}$  verdoppelt. Der neue relative Anteil ist  $\frac{6}{8}$ .

Als Rechnung:  $\frac{3}{8} \cdot 2 = \frac{3 \cdot 2}{8} = \frac{6}{8}$

Allgemein gilt:  $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$



Bruch · Zahl



Berechne das Ergebnis.

a)  $\frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$     b)  $\frac{3}{7} \cdot 2 = \frac{6}{7}$     c)  $\frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{10}{3}$     d)  $\frac{6}{5} \cdot 7 = \frac{42}{5}$

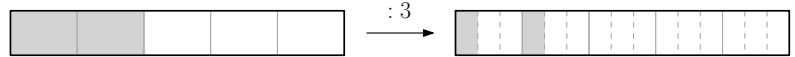
Für  $\frac{42}{5} = 8 + \frac{2}{5}$  gibt es auch die Schreibweise  $8 \frac{2}{5}$ .

Wegen der Verwechslungsgefahr mit  $8 \cdot \frac{2}{5} = \frac{16}{5}$  (bzw.  $a \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{ab}{c}$ ) verzichten wir auf diese Schreibweise.

Bruch : Zahl 


Um den Bruch  $\frac{2}{5}$  durch 3 zu dividieren, multiplizieren wir den Nenner mit 3.

Als Rechnung:  $\frac{2}{5} : 3 = \frac{2}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$



Gerhard freut sich schon auf  $\frac{2}{5}$  eines Apfelstrudels. Er möchte aber nicht alles auf einmal essen, sondern dieses Stück in 3 gleiche Teile teilen. Dazu kann er die  $\frac{1}{5}$ -Teile dritteln, also  $\frac{1}{15}$ -Teile des gesamten Apfelstrudels bilden und zwei dieser Teile verspeisen.

Allgemein gilt:  $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$

Bruch : Zahl 

Berechne das Ergebnis.

a)  $\frac{1}{4} : 3 = \frac{1}{12}$     b)  $\frac{3}{7} : 2 = \frac{3}{14}$     c)  $\frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{15}$     d)  $\frac{6}{5} : 7 = \frac{6}{35}$

Bruch · Bruch 

Rechts unten ist ein Quadrat mit Seitenlänge 1 m dargestellt.

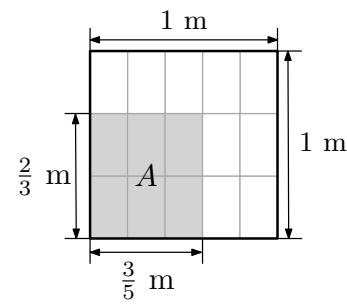
Wir berechnen den Flächeninhalt  $A$  der grau markierten Fläche auf zwei verschiedene Arten:

1)  $A = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \text{ m}^2$

2)  $A = 6 \cdot \frac{1}{15} \text{ m}^2 = \frac{6}{15} \text{ m}^2 = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5} \text{ m}^2$

Allgemein gilt:  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

„Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner“



Bruch · Bruch 

Berechne das Ergebnis, und kürze so weit wie möglich.

a)  $\frac{3}{2} \cdot \frac{14}{6} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 7}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} = \frac{7}{2}$     b)  $\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{2} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 3 \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot \cancel{2}} = \frac{2 \cdot 3}{1} = 6$

$x$  : Bruch 

Statt durch den Bruch  $\frac{a}{b}$  zu dividieren, können wir auch mit seinem **Kehrwert**  $\frac{b}{a}$  multiplizieren.

Zum Beispiel:  $5 : \frac{3}{2} = 5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$

Begründung:  $12 : 4 = 3$ , weil  $3 \cdot 4 = 12 \checkmark$

Allgemein gilt:  $x : \frac{a}{b} = x \cdot \frac{b}{a}$

$x : \frac{a}{b} = x \cdot \frac{b}{a}$ , weil  $\left(x \cdot \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{a}{b} = x \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = x \cdot \frac{b \cdot a}{a \cdot b} = x \cdot 1 = x \checkmark$

Beachte auch, dass  $\frac{3}{2} : 5 = \frac{3}{10}$  der Kehrwert von  $5 : \frac{3}{2} = \frac{10}{3}$  ist.

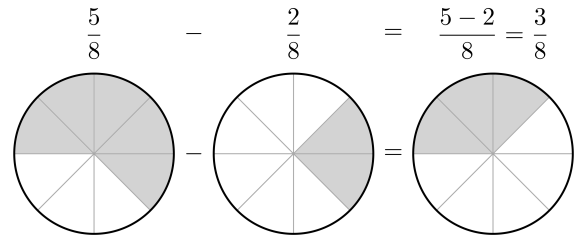
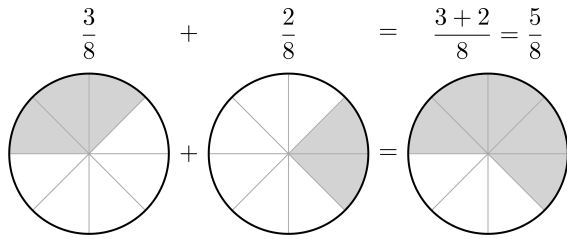
$x$  : Bruch 

Berechne das Ergebnis, und kürze so weit wie möglich.

a)  $35 : \frac{20}{3} = 35 \cdot \frac{3}{20} = \frac{\cancel{5} \cdot 7 \cdot 3}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{5}} = \frac{21}{4}$     b)  $\frac{14}{15} : \frac{28}{3} = \frac{14}{15} \cdot \frac{3}{28} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{7}} = \frac{1}{10}$

Bruch ± Bruch 

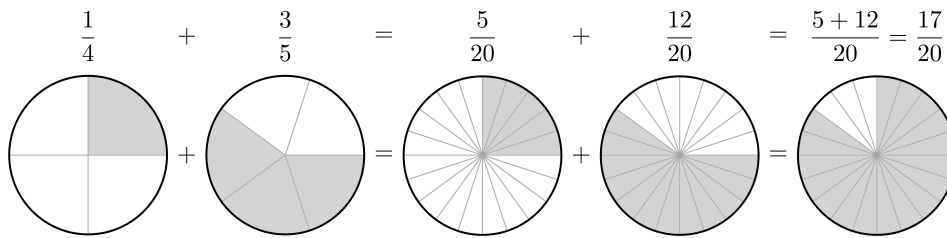
Wenn zwei Brüche den *gleichen Nenner* haben, dann können wir sie sofort addieren bzw. subtrahieren:



Allgemein gilt:  $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

Allgemein gilt:  $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$


Wenn sie *verschiedene Nenner* haben, dann erweitern wir sie zuerst auf einen gemeinsamen Nenner:



Bruch ± Bruch 

Berechne das Ergebnis, und kürze so weit wie möglich.

a)  $\frac{5}{6} + \frac{4}{9} = \frac{15}{18} + \frac{8}{18} = \frac{23}{18}$     b)  $3 - \frac{2}{7} = \frac{3}{1} - \frac{2}{7} = \frac{21}{7} - \frac{2}{7} = \frac{19}{7}$

Kleinsten gemeinsamen Nenner 

Bei der Addition  $\frac{1}{30} + \frac{1}{42}$  könnten wir die Brüche auf den gemeinsamen Nenner  $30 \cdot 42 = 1260$  erweitern.

Der *kleinste gemeinsame Nenner* ist  $\text{kgV}(30; 42) = \text{kgV}(2 \cdot 3 \cdot 5; 2 \cdot 3 \cdot 7) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ .

Erweitere auf den kleinsten gemeinsamen Nenner, damit Zähler und Nenner möglichst klein bleiben:

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{42} = \frac{7}{210} + \frac{5}{210} = \frac{12}{210} = \frac{6}{105} = \frac{2}{35}$$

Doppelbrüche 

Zur Auflösung von Doppelbrüchen können wir den Hauptbruchstrich durch eine Division ersetzen:

i)  $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$     ii)  $\frac{a}{\frac{b}{c}} = a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b}$     iii)  $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

„Außen mal außen durch innen mal innen“

Doppelbrüche 

Berechne das Ergebnis, und kürze so weit wie möglich.

a)  $\frac{\frac{4}{7}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{7} : \frac{2}{3} = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{7}$     b)  $\frac{7}{\frac{2}{3}} = 7 : \frac{2}{3} = 7 \cdot \frac{3}{2} = \frac{21}{2}$     c)  $\frac{5}{\frac{2}{3}} = 5 : \frac{2}{3} = 5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$

