

Die **Gleichung** $x^2 = 6 \cdot x - 8$ hat genau zwei Lösungen über der Grundmenge \mathbb{R} .

Diese **Lösungen** sind **Zahlen**.

Durch Einsetzen können wir überprüfen, ob eine Zahl eine Lösung der Gleichung ist.

- 1) Zeige durch Einsetzen, dass die Zahl 5 *keine* Lösung dieser Gleichung ist.

Linke Seite: $5^2 = 25$ Rechte Seite: $6 \cdot 5 - 8 = 22$ ✗

- 2) Zeige durch Einsetzen, dass die Zahl 4 eine Lösung dieser Gleichung ist.

Linke Seite: $4^2 = 16$ Rechte Seite: $6 \cdot 4 - 8 = 16$ ✓

Die **Differentialgleichung** (kurz: DGL) $y'(x) = y(x) + 4 \cdot x$ hat unendlich viele Lösungen.

Diese **Lösungen** sind **Funktionen**.

Für diese Differentialgleichungen schreibt man auch kürzer: $y' = y + 4 \cdot x$

Durch Einsetzen können wir überprüfen, ob eine Funktion eine Lösung der Differentialgleichung ist.

- 1) Zeige durch Einsetzen, dass die Funktion $y(x) = x^2 - 4 \cdot x + 2$ *keine* Lösung dieser DGL ist.

Linke Seite: $y'(x) = 2 \cdot x - 4$

Rechte Seite: $y(x) + 4 \cdot x = x^2 - 4 \cdot x + 2 + 4 \cdot x = x^2 + 2$ ✗

- 2) Zeige durch Einsetzen, dass die Funktion $y(x) = 5 \cdot e^x - 4 \cdot x - 4$ eine Lösung dieser DGL ist.

Linke Seite: $y'(x) = 5 \cdot e^x - 4$

Rechte Seite: $y(x) + 4 \cdot x = 5 \cdot e^x - 4 \cdot x - 4 + 4 \cdot x = 5 \cdot e^x - 4$ ✓



Die Differentialgleichung $y'(x) = y(x) + 4 \cdot x$ hat unendlich viele Lösungen.

Für jede Zahl $c \in \mathbb{R}$ ist nämlich

$$y(x) = c \cdot e^x - 4 \cdot x - 4$$

eine Lösung dieser DGL. Tatsächlich sind das *alle* Lösungen dieser DGL.

Das ist die sogenannte **allgemeine Lösung** dieser Differentialgleichung.

Zusammen mit einem **Anfangswert** – zum Beispiel $y(0) = 1$ – ist die Lösung eindeutig:

$$y(x) = 5 \cdot e^x - 4 \cdot x - 4$$

Das ist jene **spezielle Lösung** dieser Differentialgleichung, die $y(0) = 1$ erfüllt.

Erinnere dich an das Ermitteln von **Stammfunktionen** zur **Integralrechnung**.

- 1) Ermittle die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) + 6 \cdot x - 2 = 0$.

- 2) Ermittle jene spezielle Lösung der Differentialgleichung $y'(x) + 6 \cdot x - 2 = 0$ mit $y(4) = 2$.

1) $y'(x) = -6 \cdot x + 2 \iff y(x) = -3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

2) $y(4) = 2 \iff -3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + c = 2 \iff c = 42$

Spezielle Lösung: $y(x) = -3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 42$



Rechts siehst du, wie man in GeoGebra mit dem LöseDgl-Befehl die allgemeine Lösung der DGL

$$y'(x) = y(x) + 4 \cdot x$$

bzw. jene spezielle Lösung mit $y(0) = 1$ ermitteln kann.

▶ CAS	
1	LöseDgl(y'=y+4*x)
<input type="radio"/>	→ $y = c_1 e^x - 4x - 4$
▶ CAS	
1	LöseDgl(y'=y+4*x,(0,1))
<input type="radio"/>	→ $y = -4x + 5e^x - 4$

Richtungsfeld



Die Entwicklung der Populationsgröße P einer Eulenpopulation wird durch folgende DGL modelliert:

$$P'(t) = 0,04 \cdot P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{500}\right) \quad \text{mit } P(t) \geq 0$$

$t \dots$ Zeit in Monaten

$P(t) \dots$ Populationsgröße zum Zeitpunkt t

Diese DGL ordnet jedem Wert von P eindeutig einen Wert von P' zu.

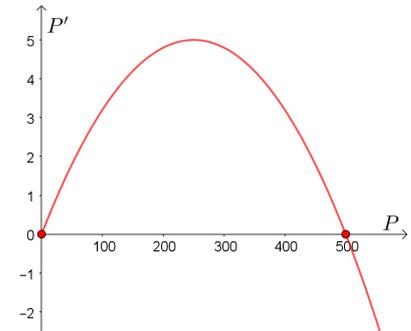
- 1) Welchen Wert hat P' , wenn die Population 50 Eulen groß ist?

$$P' = 0,04 \cdot 50 \cdot \left(1 - \frac{50}{500}\right) = 1,8 \text{ Eulen/Monat}$$

- 2) Ermittle alle Werte von P , für die $P' = 0$ gilt.

$$P' = 0 \iff P = 0 \text{ oder } 1 - \frac{P}{500} = 0 \iff P = 0 \text{ oder } P = 500$$

- 3) Skaliere im Bild rechts oben die waagrechte Achse geeignet, und skizziere den Funktionsgraphen von $P \mapsto P'$.



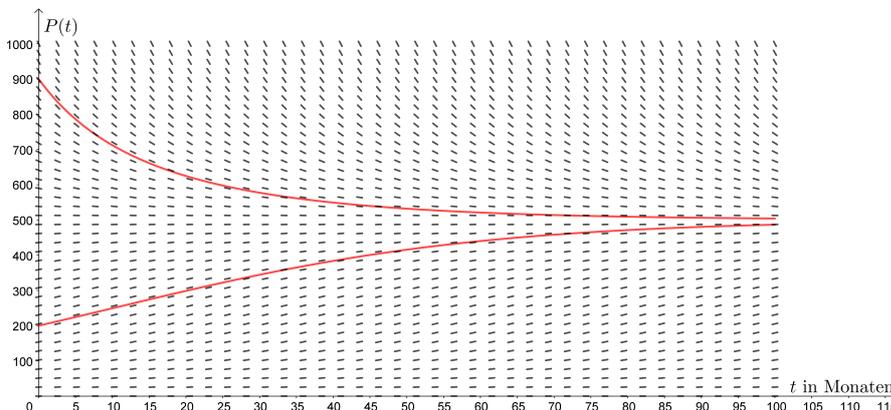
Um welchen Funktionstyp handelt es sich bei $P \mapsto 0,04 \cdot P \cdot \left(1 - \frac{P}{500}\right)$?

Die Entwicklung der Populationsgröße hängt vom Startwert $P(0)$ ab.

Im Koordinatensystem unten ist das sogenannte **Richtungsfeld** dieser DGL dargestellt.

Die kurze Strecke im Punkt $(t \mid P(t))$ deutet die **Tangente** an die Lösungskurve durch diesen Punkt an.

- 4) Skizziere unten den Populationsverlauf für die Startwerte $P(0) = 200$ bzw. $P(0) = 900$.



- 5) Ermittle die Funktionsgleichung der speziellen Lösung mit $P(0) = 200$ mit Technologieeinsatz.

$$P(t) = \frac{1000}{3 \cdot e^{-0,04t} + 2}$$

▶ CAS	
1	LöseDgl(y'=0.04*y*(1-y/500),(0,200))
<input type="radio"/>	≈ $y = \frac{1000}{3 e^{-0.04x} + 2}$

