Gleichungen

Die **Gleichung** $\boldsymbol{x^2 = 6 \cdot x - 8}$ hat genau zwei Lösungen über der Grundmenge $\mathbb{R}$.
Diese **Lösungen** sind **Zahlen**.
Durch Einsetzen können wir überprüfen, ob eine Zahl eine Lösung der Gleichung ist.

1) Zeige durch Einsetzen, dass die Zahl 5 *keine* Lösung dieser Gleichung ist.

Linke Seite: $5^2 = 25$ Rechte Seite: $6 \cdot 5 - 8 = 22$ ✗

2) Zeige durch Einsetzen, dass die Zahl 4 eine Lösung dieser Gleichung ist.

Linke Seite: $4^2 = 16$ Rechte Seite: $6 \cdot 4 - 8 = 16$ ✓

Differentialgleichungen

Die **Differentialgleichung** (kurz: DGL) $\boldsymbol{y'(x) = y(x) + 4 \cdot x}$ hat unendlich viele Lösungen.
Diese **Lösungen** sind **Funktionen**. Für diese Differentialgleichungen schreibt man auch kürzer: $y' = y + 4 \cdot x$
Durch Einsetzen können wir überprüfen, ob eine Funktion eine Lösung der Differentialgleichung ist.

1) Zeige durch Einsetzen, dass die Funktion $y(x) = x^2 - 4 \cdot x + 2$ *keine* Lösung dieser DGL ist.

Linke Seite: $y'(x) = 2 \cdot x - 4$
Rechte Seite: $y(x) + 4 \cdot x = x^2 - 4 \cdot x + 2 + 4 \cdot x = x^2 + 2$ ✗

2) Zeige durch Einsetzen, dass die Funktion $y(x) = 5 \cdot e^x - 4 \cdot x - 4$ eine Lösung dieser DGL ist.

Linke Seite: $y'(x) = 5 \cdot e^x - 4$
Rechte Seite: $y(x) + 4 \cdot x = 5 \cdot e^x - 4 \cdot x - 4 + 4 \cdot x = 5 \cdot e^x - 4$ ✓

Allgemeine Lösung / Spezielle Lösung

Die Differentialgleichung $y'(x) = y(x) + 4 \cdot x$ hat unendlich viele Lösungen.
Für jede Zahl $c \in \mathbb{R}$ ist nämlich

$$\boldsymbol{y(x) = c \cdot e^x - 4 \cdot x - 4}$$

eine Lösung dieser DGL. Tatsächlich sind das *alle* Lösungen dieser DGL.
Das ist die sogenannte **allgemeine Lösung** dieser Differentialgleichung.

Zusammen mit einem **Anfangswert** – zum Beispiel $y(0) = 1$ – ist die Lösung eindeutig:

$$\boldsymbol{y(x) = 5 \cdot e^x - 4 \cdot x - 4}$$

Das ist jene **spezielle Lösung** dieser Differentialgleichung, die $y(0) = 1$ erfüllt.

Stammfunktionen

Erinnere dich an das Ermitteln von Stammfunktionen zur Integralrechnung.

1) Ermittle die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) + 6 \cdot x - 2 = 0$.

2) Ermittle jene spezielle Lösung der Differentialgleichung $y'(x) + 6 \cdot x - 2 = 0$ mit $y(4) = 2$.

1) $y'(x) = -6 \cdot x + 2 \iff y(x) = -3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

2) $y(4) = 2 \iff -3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + c = 2 \iff c = 42$

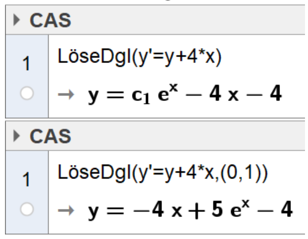
Spezielle Lösung: $y(x) = -3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 42$

Differentialgleichungen mit GeoGebra lösen

Rechts siehst du, wie man in GeoGebra mit dem LöseDgl-Befehl die allgemeine Lösung der DGL

$$y'(x) = y(x) + 4 \cdot x$$

bzw. jene spezielle Lösung mit $y(0) = 1$ ermitteln kann.



Richtungsfeld

Die Entwicklung der Populationsgröße P einer Eulenpopulation wird durch folgende DGL modelliert:

$$P'(t) = 0{,}04 \cdot P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{500}\right) \quad \text{mit } P(t) \geq 0$$

t . . . Zeit in Monaten
$P(t)$ . . . Populationsgröße zum Zeitpunkt t

Diese DGL ordnet jedem Wert von P eindeutig einen Wert von P' zu.

1) Welchen Wert hat P', wenn die Population 50 Eulen groß ist?

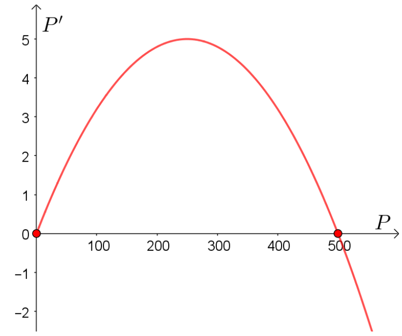
$$P' = 0{,}04 \cdot 50 \cdot \left(1 - \frac{50}{500}\right) = 1{,}8 \text{ Eulen/Monat}$$

2) Ermittle alle Werte von P, für die $P' = 0$ gilt.

$$P' = 0 \iff P = 0 \text{ oder } 1 - \frac{P}{500} = 0 \iff$$

$$\iff P = 0 \text{ oder } P = 500$$

3) Skaliere im Bild rechts oben die waagrechte Achse geeignet, und skizziere den Funktionsgraphen von $P \mapsto P'$.

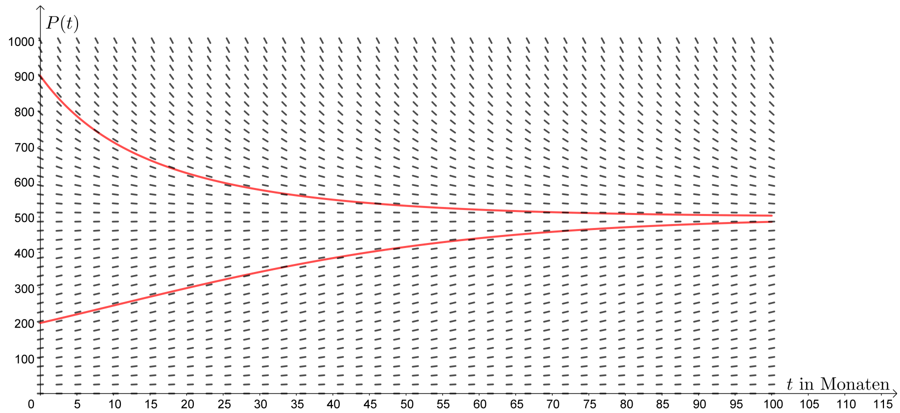


Um welchen Funktionstyp handelt es sich bei $P \mapsto 0{,}04 \cdot P \cdot (1 - \frac{P}{500})$?

Die Entwicklung der Populationsgröße hängt vom Startwert $P(0)$ ab.

Im Koordinatensystem unten ist das sogenannte **Richtungsfeld** dieser DGL dargestellt.
Die kurze Strecke im Punkt $(t \mid P(t))$ deutet die Tangente an die Lösungskurve durch diesen Punkt an.

4) Skizziere unten den Populationsverlauf für die Startwerte $P(0) = 200$ bzw. $P(0) = 900$.



5) Ermittle die Funktionsgleichung der speziellen Lösung mit $P(0) = 200$ mit Technologieeinsatz.

$$P(t) = \frac{1000}{3 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t} + 2}$$